الفصل السادس

الارتبــاط والانحــدار

1.6 الارتباط :

الارتباط يبحث في العلاقة بين المتغيرات (الظواهر) من حيث قوتها واتجاهها ، وبالتالي فالارتباط معيار لقياس قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين أو أكثر . ووفقا لما تقدم فإن الارتباط قد يكون قويا أو ضعيفا أو معدوما تبعا للعلاقة ، وأيضا قد يكون الارتباط موجبا (طرديا) أو سالبا (عكسيا) حسب اتجاه العلاقة بين المتغيرات.

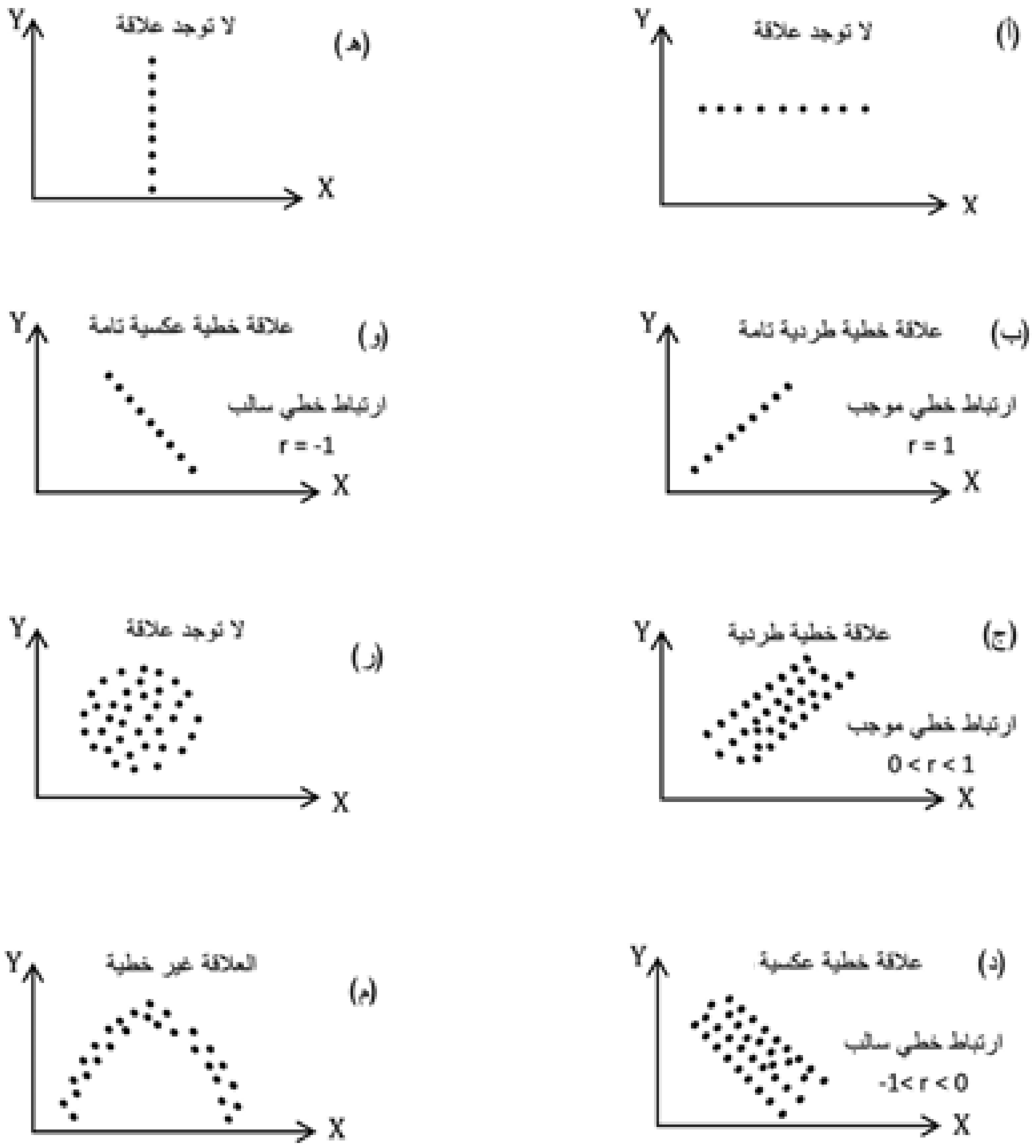
1.1.6 الارتباط البسيط :

وهو يبحث في قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) فقط مثل الطول والوزن أو درجات مقررين أو عدد الساعات التي يقضيها طالب في المذاكرة والدرجة المتحصل عليها في الامتحان النهائي . والارتباط البسيط قد يكون خطيا "بسيطا" حيث يفترض أن العلاقة بين المتغيرين خطية ، أو غير خطية بفرض أن العلاقة بين المتغيرين غير خطية .

والارتباط البسيط سيكون طرديا (موجبا) إذا تغير أحد المتغيرين (الظاهرتين) في اتجاه ما أدى إلى تغير المتغير الآخر (الظاهرة الأخرى) في الاتجاه نفسه مثل الطول والوزن للأطفال، كمية الأملاح بالجسم وضغط الدم ، كمية الإنتاج وعدد العمال ، ويكون هذا الارتباط عكسيا (سالبا) إذا تغير أحد المتغيرين في اتجاه ما أدى إلى تغير المتغير الآخر في الاتجاه المخالف مثل العرض والسعر لسلعة ما ، عدد أيام الغياب والدرجات بالامتحان .

فالارتباط البسيط يكون خطيا إذا كنت العلاقة التي تربط المتغيرين خطية (في صورة خط مستقيم) .

إن الارتباط بين متغيرين من حيث القوة والضعف، طردي أوعكسي خطي أوغير خطي، يمكن الاستدلال عليه باستخدام الأشكال الانتشارية ، والشكل الانتشاري يبين انتشار قيم المتغيرين على محوري الإحداثيات، ومن خلال تفحص هذا الشكل يمكن الحصول على فكرة عامة حول العلاقة ونوعيتها وبالتالي حول الارتباط بين المتغيرين ، وهناك أنواع مختلفة من الأشكال الانتشارية من أمثلتها:


(أ) لا توجد علاقة
Y
X
(ب) علاقة خطية طردية تامة
ارتباط خطي موجب
r = 1
Y
X
(ج) علاقة خطية طردية
ارتباط خطي موجب
0 < r < 1
Y
X
(د) علاقة خطية عكسية
ارتباط خطي سالب
-1< r < 0
Y
X
(هـ) لا توجد علاقة
Y
X
(و) علاقة خطية عكسية تامة
ارتباط خطي سالب
r = -1
Y
X
(ز) لا توجد علاقة
Y
X
(م) العلاقة غير خطية
Y
X

2.1.6 الارتباط الخطي البسيط :

إن الارتباط الخطي البسيط هو أكثر أنواع الارتباط استخداما وذلك نظراً لأن معظم العلاقات غير الخطية بين متغيرين يمكن تقريبها بشكل فرضي إلى علاقة خطية ، وعلى وجه العموم الارتباط الخطي البسيط يقيس قوة واتجاه العلاقة الخطية بين المتغيرين ، وعادة ما يقاس بما يسمى بمعامل الارتباط ويرمز له بالـــرمز (r) وهناك عدة أنواع لمعاملات الارتباط تختلف باختلاف الظواهر، ومن أشهر هذه المعاملات للظواهر الكمية :

أ. معامل ارتباط بيرسون :

ويعرّف على أنه متوسط حاصل ضرب القيم المعيارية للظاهرتين ومن خواص هذا المعامل :

1. إذا كانت العلاقة الخطية بين المتغيرين منعدمة فإن معامل الارتباط = 0 .
2. إذا كانت العلاقة الخطية بين المتغيرين علاقة طردية تامة فإن معامل الارتباط = 1، وإذا كانت عكسية تامة فإن معامل الارتباط = 1- .
3. تتراوح قيمة معامل الارتباط بين 1+ ، و 1- .
4. كلما اقترب معامل الارتباط من الصفر دل على ضعف العلاقة بينهما، وكلما اقترب من 1 ∓ دل على قوة العلاقة .

1) معامل الارتباط الخطي البسيط (معامل ارتباط بيرسون) :

لقد تعرضنا لهذا النوع من البيانات فيما سبق ، فإذا كان المتغيران هما (Y , X) فإن معامل ارتباط بيرسون يرمز له بالرمز r ويعرّف كالآتي :

$$\boxed{r = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{s_x\, s_y}\right]}$$

حيث $\bar{x}$ متوسط الظاهرة x ، $\bar{y}$ متوسط الظاهرة y ، s_x الانحراف المعياري للظاهرة X

s_y الانحراف المعياري للظاهرة Y .

وحساب معامل الارتباط باستخدام هذه العلاقة غالبا ما يكون صعب الحساب ، وعليه فقد وجدت صيغة أخرى أكثر سهولة في التطبيق وهي :

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

وهذه الصيغة يطلق عليها الصيغة المباشرة ، ويمكن توضيح استخدامها لبيانات المثال التالي :

مثال (6-1) :

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين X , y مبينا نوعه ودرجته حسب بيانات الجدول التالي وذلك باستخدام الصيغة المباشرة :

X	48	49	50	51	52
y	28	29	33	29	31

الحلّ :

لإيجاد معامل الارتباط بالصيغة المباشرة ، نكوّن الجدول التالي :

ر.م	x	y	x y	x^2	y^2
1	48	28	1344	2304	784
2	49	29	1421	2401	841
3	50	33	1650	2500	1089
4	51	29	1479	2601	841
5	52	31	1612	2704	961
المجموع	250	150	7506	12510	4516

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{5(7506) - (150)\ (250)}{\sqrt{[\ 5(12510) - (250)^2\ ]\ [\ 5(4516) - (150\ )^2]}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{(50)\ (80)}} = \frac{30}{63.25} = 0.47$$

وهذا يعنى أن الارتباط طردي ضعيف .

مثال (6-2) :

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين X , y مبينا نوعه ودرجته حسب بيانات الجدول التالي :

5	4	3	2	1	X
2	3	1	1	3	y

الحلّ :

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

لتحديد معامل الارتباط نكوّن الجدول الآتي :

ر.م	x	y	$x\,y$	X^2	y^2
1	1	3	3	1	9
2	2	1	2	4	1
3	3	1	3	9	1
4	4	3	12	16	9
5	5	2	10	25	4
المجموع	15	10	30	55	24

$$r = \frac{(5)\,(30) - (15)\,(10)}{\sqrt{[\,5\,(55) - (15)^2\,]\;[\,5(24) - (10)^2]}}$$

$$= \frac{150 - 150}{\sqrt{[\;(275) - (225)\,]\;[\,(120) - (100\,)]}} = \frac{0}{\sqrt{1000}} = 0$$

وهذا يعني أن الارتباط منعدم بين المتغيرين.

ب. معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

لقد درسنا معامل ارتباط بيرسون والذي يستخدم لتحديد قوة واتجاه العلاقة بين ظاهرتين كميتين ، وحيث أن الظواهر قد تكون كمية أو وصفية . فإذا أردنا دراسة العلاقة بين ظاهرتين وصفيتين فإنه لا يمكن استخدام معامل ارتباط بيرسون ، وعليه فقد وجدت طريقة أخرى يمكن استخدامها في مثل هذه الحالات وهي تعتمد على رتب الظاهرتين ، وبالتالي فإن ناتج هذه الطريقة يسمى بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان وسوف نرمز له بالرمز (r) حيث :

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

حيث n عدد الرتب (البيانات المزدوجة) , d_i هو الفرق بين رتبتين متناظرتين ، $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ هو مجموع مربعات تلك الفروق ، وسوف نتعرض لطريقة حسابه والتي تكون على النحو التالي :

أولا : إذا كانت البيانات مفردة :

لحساب معامل ارتباط الرتب يجب اتّباع الخطوات التالية :

1.إعطاء رتب لكل مفردة من مفردات الظاهرتين (قيم أو صفات) وبالطريقة نفسها (تصاعديا معا أو تنازليا معا) .

2.نجد الفرق بين رتب الظاهرتين للمفردة نفسها ، أي نجد d_i ، ثم نجد مربع الفرق (d_i^2) ثم نجد مجموع مربعات الفروق ($\sum_{i=1}^{n} d_i^2$) .

3.نستخدم القانون $r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$ وذلك لتحديد معامل ارتباط الرتب .

مثال (6-3) :

إذا كانت تقديرات 5 طلبة في مادتين كما هو مبين أدناه ، فاحسب معامل الارتباط بين هاتين الظاهرتين .

الطالب	1	2	3	4	5
تقدير المادة الأولى	جيد	ممتاز	جيد جداً	مقبول	ضعيف
تقدير المادة الثانية	مقبول	جيد جداً	جيد	ممتاز	ضعيف

الحل :

لاحظ أن البيانات وصفية ، وبالتالي معامل الارتباط المناسب لها هو معامل ارتباط الرتب على النحو التالي :

الطالب	تقدير المادة الأولى	تقدير المادة الثانية	رتب المادة الأولى	رتب المادة الثانية	الفروق d	مربعات الفروق d^2
1	جيد	مقبول	3	2	1	$1^2=1$
2	ممتاز	جيد جدا	5	4	1	$1^2=1$
3	جيد جدا	جيد	4	3	1	$1^2=1$
4	مقبول	ممتاز	2	5	-3	$-3^2=9$
5	ضعيف	ضعيف	1	1	0	$0^2=0$
المجموع			15	15	0	12

وعليه :

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,(12)}{5(25-1)} = 1 - \frac{6(12)}{5(24)} = 1 - \frac{3}{5} = 0.4$$

وهو ارتباط طردي ضعيف.

مثال (4-6):

البيانات التالية تمثل درجات 8 طلبة في مقررين والمطلوب تحديد معامل ارتباط الرتب

المقرر	1	2	3	4	5	6	7	8
درجة المقرر الأول	30	17	35	28	42	25	19	34
درجة المقرر الثاني	35	31	40	46	50	32	33	42

الحل :

المطلوب هو تحديد معامل ارتباط الرتب ، وبالتالي يجب تحديد رتب القيم ، كما هو بالجدول التالي :

الطالب	درجة المقرر الأول	درجة المقرر الثاني	رتب درجات المقررالأولى	رتب درجات المقررالثاني	الفروق d	مربعات الفروق d^2
1	30	35	5	4	1	$1^2=1$
2	17	31	1	1	0	$0^2=0$
3	35	40	7	5	2	$2^2=4$
4	28	46	4	7	-3	$-3^2=9$
5	42	50	8	8	0	$0^2=0$
6	25	32	3	2	1	$1^2=1$
7	19	33	2	3	-1	$(-1)^2=1$
8	34	42	6	6	0	$0^2=0$
المجموع			36	36	0	16

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(16)}{8(64-1)} = 1 - \frac{6(16)}{8(63)} = 1 - 0.19 = 0.81$$

وهو ارتباط قوي ، أي هناك علاقة قوية طردية بين رتب درجات المقررين .

ثانياً : إذا كانت البيانات مكررة :

إن حساب معامل ارتباط الرتب مبنى على أساس أن يكون لكل صفة رتبة ولكل رتبة صفة ، فإذا وجد تكرار لبعض الصفات فإنه لا يمكن حساب معامل ارتباط الرتب إلا بعد تحديد الصفات المكررة ثم تعطى رتباً (تصاعدية أو تنازلية) على اعتبار أنها مختلفة ، وبحساب المتوسط الحسابي لرتب الصفات المتكررة والذي يمكن اعتباره الرتبة الموحدة لتلك البيانات (الصفات) المكررة . ثم نتبع الخطوات السابقة لحساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وذلك باستخدام الرتب المعدلة ، ولتوضيح ذلك نتبع المثال التالي :

مثال (6-5):

ذكر أحد المختصين بأنّ الارتباط بين عدد الأطفال والمستوى التعليمي لرب الأسرة ارتباط طردي ، فهل تؤيد رأيه بناءً على البيانات الآتية :

الأسرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد الأطفال	4	3	2	7	3	4	7	3	5
المستوى التعليمي	يقرأ ويكتب	شهادة عليا	شهادة متوسطة	يقرأ ويكتب	شهادة متوسطة	شهادة متوسطة	أمي	شهادة متوسطة	أمي

لاحظ أنه لا يمكن حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لوجود بيانات مكررة إلا بعد تعديل الرتب للصفات المكررة أي الحصول على الرتب المعدلة وذلك باتّباع الآتي :

كيفية حساب الرتب المعدلة للبيانات المكررة (النجوم تبين الصفات المتكررة)

أولاً (لعدد الأطفال)

1. أسر لديها 4 أطفال مكررة مرتين، الرتب المعدلة هي $\frac{(6+5)}{2} = 5.5$.

2. أسر لديها 3 أطفال مكررة ثلاث مرات، الرتب المعدلة هي $\frac{(4+3+2)}{3} = 3$.

3. أسر لديها طفلان (غير متكرر)، أي: أسرة واحدة تأخذ رتبتها الأصلية وهي 1 .

4. أسر لديها 7 أطفال مكررة مرتين، الرتب المعدلة هي $\frac{(9+8)}{2} = 8.5$.

ثانياً : (للمستوى التعليمي)

1. يقرأ ويكتب مكررة مرتين، الرتب المعدلة هي : $\frac{(4+3)}{2} = 3.5$.

2. شهادة عليا (غير متكرر)، أي: أسرة واحدة تأخذ رتبتها الأصلية وهي 9 .

3. شهادة متوسطة مكرره أربع مرات، الرتب المعدلة: $\frac{(8+7+6+5)}{4} = 6.5$.

4. أمي مكررة مرتين ،الرتب المعدلة هي: $\frac{(2+1)}{2} = 1.5$

عدد الأطفال	المستوى التعليمي	رتب عدد الأطفال	رتب المستوى التعليمي	الرتب المعدلة لعدد الأطفال	الرتب المعدلة للمستوى التعليمي	الفروق d	مربعات الفروق d^2
4**	**يقرأ ويكتب	5	3	5.5	3.5	2	$2^2=4$
3*	شهادة عليا	2	9	3	9	-6	$-6^2=36$
2	***شهادة متوسطة	1	5	1	6.5	-5.5	$-5.5^2=30.25$
7***	**يقرأ ويكتب	8	4	8.5	3.5	5	25
3*	***شهادة متوسطة	3	6	3	6.5	-3.5	$-3.5^2=12.25$
4**	***شهادة متوسطة	6	7	5.5	6.5	-1	$-1^2=1$
7***	*أمي	9	1	8.5	1.5	7	$-7^2=49$
3*	***شهادة متوسطة	4	8	3	6.5	-3.5	$-3.5^2=12.25$
5	*أمي	7	2	7	1.5	5.5	30.25
المجموع		45	45	45	45	0	200

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(200)}{9(81-1)} = 1 - \frac{6(200)}{9(80)} = 1 - 1.67 = -0.67$$

ونلاحظ بأن الارتباط عكسي قوي وهذا لا يؤيد رأي الأختصاصي

2.6 الانحدار :

عند دراستنا لمعامل الارتباط ذكرنا أنه مقياس لقوة واتجاه العلاقة بين المتغيرات (الظواهر) المدروسة ، إلا أنه لا يتعرض إلى تحديد هذه العلاقة . وعليه وجد موضوع آخر يبحث في كيفية الحصول على الصيغة الرياضية للعلاقة التقديرية بين الظواهر، وهو ما يسمّى بالانحدار . فالانحدار هو الدراسة الخاصة بتحديد العلاقة بين المتغيرات . إن تحديد الصيغة الرياضية للعلاقة بين الظواهر إن وجدت تساعد في تقدير قيم بعض الظواهر إذا عرفت قيم الظواهـر الأخرى ، وعند دراسة الانحدار يجب التمييز بين المتغيرات (الظواهر) المستقلة والمتغيرات (الظواهر) التابعة .

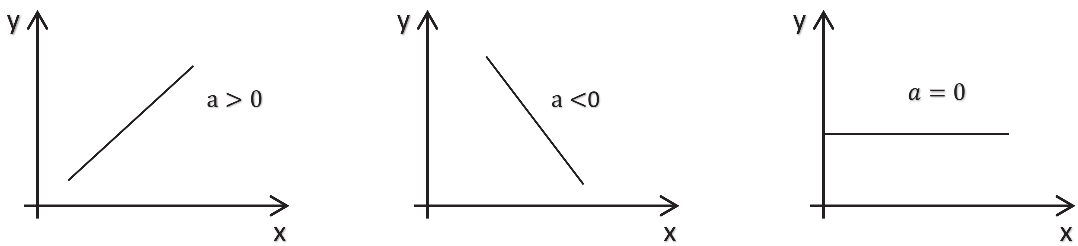
إن العلاقة بين المتغيرات يمكن أن تأخذ أشكالا متعددة وفقا لعدد المتغيرات من جهة ودرجة أو نوع العلاقة من جهة أخرى ، ومن أبسط هذه الصور هي العلاقة الخطية من الدرجة الأولى، وهي علاقة بين متغيرين فقط أحدهما تابع والآخر مستقل، ويسمى الانحدار في هذه الحالة بالانحدار الخطي البسيط .

وقد تكون العلاقة بين المتغيرين غير خطية (من درجة أعلى من الدرجة الأولى ،أو آسية) وفي هذه الحالة يسمى بالانحدار غير الخطي . وأما إذا كنا نبحث في العلاقة بين أكثر من متغيرين فإننا نتحدث على الانحدار المتعدد .

وعادة ما يستخدم الشكل الانتشاري في تحديد صورة العلاقة التقريبية ، فبواسطته يمكن اختيار المعادلة الرياضية المناسبة بين متغيرين من المعادلات المختلفة المتاحة (كمعادلة الخط المستقيم ، معادلة المنحنى الآسي معادلة القطع المكافئ ،...) لذلك يفضل من الناحية العملية رسم الشكل الانتشاري قبل الخوض في عملية التحليل، ومن بين المعادلات المختلفة المتاحة مايلي :

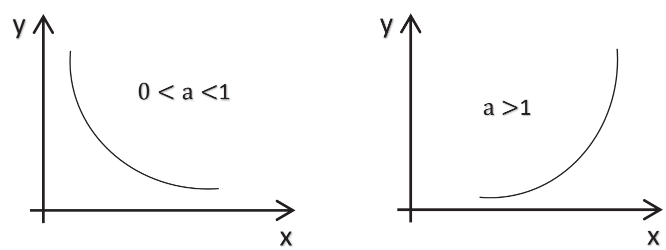
1 - معادلة الخط المستقيم:

$$Y = a\,x + b$$



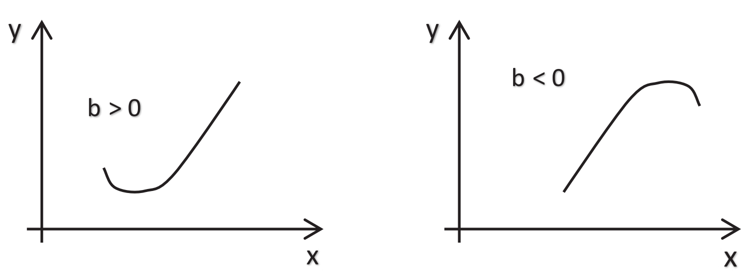
2 – معادلة المنحنى الأسي:

$$Y = a^x\, b$$



3 - معادلة منحنى الدرجة الثانية:

$$Y = a\,x^2 + b\,x + c$$



ونظراً لسهولة التعامل مع الانحدار الخطي البسيط من جهة، وإن معظم العلاقات تربط بين متغيرين يمكن تقريبهما بشكل فرضي بعلاقة خطية بسيطة من جهة أخرى، لذا فسوف نتعرض للانحدار الخطي البسيط .

1.2.6 الانحدار الخطي البسيط :

الانحدار الخطي البسيط يهتم بدراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل (X) والآخر تابع (y) مع افتراض أن العلاقة المناسبة بينهما في الصورة الخطية $y=ax+b$ حيث b , a ثابتان يجب تحديدها ، وبالتالي يتحدد شكل العلاقة التقديرية في صورة تامة . وهناك عدة طرق لتحديد هذه العلاقة منها التمهيد باليد (أو بمجرد النظر) وطريقة المربعات الصغرى . فعند اتّباع الطريقة الأولى يستخدم الشكل الانتشاري للمساعدة في تحديد العلاقة المناسبة بين المتغيرين . إلا أن هذه الطريقة لا يمكن الاعتماد عليها؛ لأنها تعطي علاقات مختلفة للبيانات نفسها باختلاف الباحثين ومهاراتهم .

وللخروج من هذه المشكلة وجدت طريقة المربعات الصغرى لتحديد العلاقة الخطية بين المتغيرين والتي سوف نتعرض لها باختصار .

طريقة المربعات الصغرى :

عند اتّباع طريقة التمهيد باليد لتحديد الخط المستقيم الذي يناسب بيانات الشكل الانتشاري أمر يتوقف على الخبرة والمهارة وبالتالي فإن هذا قد يختلف من شخص إلى آخر . ولذلك وجدت طريقة إحصائية يمكن استخدامها لتحديد أفضل خط مستقيم يمكن استخدامه كعلاقة بين متغيرين وهذه الطريقة تسمى طريقة المربعات الصغرى . وهي على النحو التالي:

$\hat{y} = \hat{a}\,X + \hat{b}$ وقد سميت هذه العلاقة بمعادلة انحدار y على X التقديرية .

حيث $\hat{y}$ القيمة التقديرية للمتغير التابع y و $\hat{a}$ القيمة التقديرية للمعلمة a (ميل معادلة انحدار y على x أى مقدار التغير في y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة) و $\hat{b}$ القيمة التقديرية للمعلمة b (قيمة y عندما $x=0$ أي الجزء المقطوع من المحور الرأسي)

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\,\overline{x}$$

حيث :

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال (6-6) :

البيانات التالية تمثل الدخل والإنفاق الشهري بالدينار لعشر أسر .

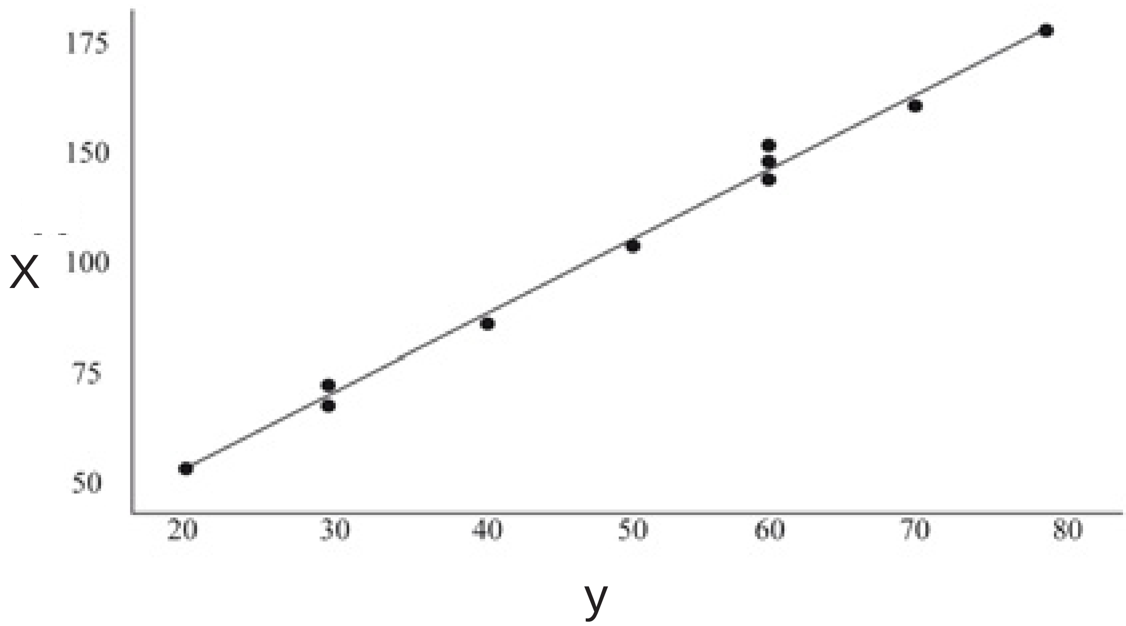
الدخل (X)	73	50	128	170	87	108	135	69	148	132
الإنفاق (y)	30	20	60	80	40	50	60	30	70	60

والمطلوب :

1. تحديد العلاقة المناسبة من خلال الشكل الانتشاري .
2. تقدير معادلة انحدار الإنفاق (y) على الدخل (X) المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى .
3. تحديد (تقدير) الإنفاق عندما يكون الدخل 110 دينارات .
4. تحديد معامل الارتباط بين الدخل والإنفاق .

الحلّ :

لتحديد العلاقة المناسبة بين المتغيرين X , y نرسم الشكل الانتشاري كما يلي :



1. من الشكل نلاحظ أن العلاقة الخطية $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ هي العلاقة بين المتغيرين y، X .

2. لتحديد معاملات العلاقة الخطية $\hat{b}$ ، $\hat{a}$ نتبع الآتي :

ر.م	x	Y	X Y	X^2	Y^2
1	73	30	2190	5329	900
2	50	20	1000	2500	400
3	128	60	7680	16384	3600
4	170	80	13600	28900	6400
5	87	40	3480	7569	1600
6	108	50	5400	11664	2500
7	135	60	8100	18225	3600
8	69	30	2070	4761	900
9	148	70	10360	21904	4900
10	132	60	7920	17424	3600
المجموع	1100	500	61800	134660	28400

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{10\,(61800) - (1100)\,(500)}{10\,(134660) - (1100)^2}$$

$$= \frac{618000 - 550000}{1346600 - 1210000} = \frac{68000}{136600} = 0.4978$$

لا حظ أن $\hat{a}$ هي معامل معادلة الانحدار المقدرة . أي أنه كلما تغيرت (زادت) X (الدخل) بدينار واحد تغيرت (زادت) y (الإنفاق) بمقدار 0.4978 دينارًا.

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\,\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1100}{10} = 110 \quad ، \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{500}{10} = 50$$

$$\hat{b} = 50 - 0.4978\,(110) = 50 - 54.758 = -4.758$$

وحيث أن $\hat{b}$ هي الجزء المقطوع في معادلة الانحدار المقدرة $\hat{y}$ أي أن قيمة y (الإنفاق) المقدرة = 4.758 - عندما يكون الدخل (X) = صفر ، وبالتالي فإن معادلة انحدار y على X التقديرية هي :

$$\hat{y} = 0.4978\,x - 4.758$$

3. الإنفاق عندما يكون الدخل $x = 110$ دنانير

$$\hat{y} = 0.4978(110) - 4.758 = 50$$

4. معامل الارتباط

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{(10)(61800) - (500)(1100)}{\sqrt{[10(134660) - (1100)^2][10(28400) - (500)^2]}}$$

$$= \frac{618000 - 550000}{\sqrt{(1346600 - 1210000)(284000 - 250000)}}$$

$$= \frac{68000}{\sqrt{(136600)(34000)}} = \frac{68000}{68149.835} = 0.9978$$

معامل الارتباط قريب من الواحد وفي هذه الحالة الارتباط طردي قوي وهذا دليل على قوة العلاقة الخطية بين الدخل (X) والإنفاق (y) .

تمارين (6)

1. اذكر مثالا لظاهرتين (X,y) بحيث يكون معامل ارتباط بيرسون = 1 ومعامل ارتباط الرتب لسبيرمان = 1 .
2. البيانات التالية تمثل قيما لمتغيرين X . y .

X	2	4	5	6	8	10
y	18	12	10	8	7	5

أوجد :

معامل ارتباط بيرسون .

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . أيهما أفضل مع التعليق ؟

3. إذا كانت $\hat{Y}=0.6X+0.3$ معادلة خط انحدار y على X وكان الوسط الحسابي لقيم x يساوي 7 فما قيمة الوسط الحسابي لقيم y ؟

أ. 2.8   ب. 4.5   جـ. 0.9   د. 0.0

4. أقوى معامل ارتباط خطي بين متغيرين من المعاملات التالية هو

أ. 0.3   ب. -0.8   جـ. 0.9   د. -0.95

5. أوجد معامل الارتباط المناسب للبيانات الآتية والتي تمثل تقديرات أحد الطلبة في خمسة امتحانات لمادتين :

المادة الأولى	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد جدا	جيد
المادة الثانية	ضعيف جدا	جيد جدا	ضعيف	جيد	مقبول

6. اذكر مثالا لظاهرتين يكون فيه :

أ- معامل الارتباط قوياً.

ب- معامل الارتباط ضعيفًا.

ت- معامل ارتباط مساويا الصفر .

7. تقدم 10 أشخاص لشغل وظيفة معينة ، فجرى امتحانهم من قبل لجنتين ، حيث أعطي الأشخاص رتبًا فكانت على النحو التالي :

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رتب اللجنة الأولى	2	5	3	6	4	1	9	8	10	7
رتب اللجنة الثانية	2	5	4	7	9	1	10	6	8	3

فهل هناك علاقة بين رتب اللجنتين ؟

8. تم فحص ضغط الدم ومستوى السكر في الدم لمجموعة من الأفراد فكان على النحو التالي :

ضغط الدم	عادي	منخفض	متوسط	عالي	عادي	منخفض	عالي	متوسط	عادي
مستوى السكر	متوسط	مرتفع	عادي	منخفض	عادي	مرتفع	منخفض	متوسط	متوسط

فهل هناك ارتباط بين الرتب .

9. لقد تعرضنا إلى معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط الرتب . فما هو الفرق بينهما من حيث الاستخدام والدقة ، وأيهما أفضل ؟

10. إذا كان معامل ارتباط الرتب لسبيرمان = 1 فما معنى ذلك وهل هذا يعنى أن معامل ارتباط بيرسون = 1؟ ولماذا ؟.

11. في دراسة الارتباط بين المتغيرين y , X تم الحصول على البيانات التالية :

$\sum y^2=84$ ، $\sum x^2=52933$ ، $\sum Xy=1858$

$n= 8$ ، $\sum y=22$ ، $\sum x=649$

أوجـد معادلة انحدار y على x

12. الجدول التالي يحتوى العمر (x) وضغط الدم (y) لعشرة أشخاص .

العمر (X)	56	42	72	46	48	56	40	42	68	60
ضغط الدم(Y)	149	125	161	149	128	152	146	140	152	155

فـهل هناك ارتباط :

1) بين القيم ؟ 2) بين الرتب ؟

13. اذكر نوع الارتباط وقوته بين الظاهرتين للحالات الآتية :

أ) عدد الطلبة في الفصل ومستوى الاستيعاب .

ب) السرعة والمسافة المقطوعة عند استعمال الفرامل فجأة .

ج) سنوات الخبرة ومستوى الدقة في العمل .

د) أنواع الأمراض والعمر .

هـ) مستوى الوعي الصحي ودرجة انتشار المرض .

و) مستوى الثقافة والغش .

ز) مستوى الوعي العام وعدد حوادث المرور .

ح) السعر والجودة لسلعة ما.

ط) الجنس والدقة في العمل .

ي) الغياب وكمية الإنتاج .

14. البيانات الآتية عن المتغيرين X , y :

X	3	1	5	2	4
Y	3	2	6	4	5

أوجـد :

أ- الشكل الانتشاري مع التعليق عليه .

ب- معامل الارتباط مع التعليق على الناتج .

ج- معادلة انحدار Y على X .

15. لتحديد العلاقة بين الوزن والطول جمعت البيانات الآتية :

العمر(X)	50	55	60	70	75
الوزن (Y)	150	160	165	160	165

أوجـد :

أ- الشكل الانتشاري مع التعليق عليه .

ب- معامل الارتباط مع التعليق على الناتج .

ج- معادلة انحدار y على x .

د- الوزن عندما يكون العمر 68 سنة .