

الفصل الثاني

العرض الجدولي للبيانات الإحصائية

(1-2) جداول التوزيعات التكرارية :

إن البيانات التي تم جمعها من أو عن مفردات المجتمع محل الدراسة وقبل أن يجري عليها أي تنظيم أو تبويب تسمى بيانات خام غير مبوبة ، والبيانات الخام لا توضح لنا اتجاهات الظاهرة المدروسة ، بل لا نستطيع أن نجري عليها أي تحليل رياضي لحساب المقاييس الإحصائية المختلفة ، ولذلك فالخطوة التالية بعد عملية جمع البيانات هي تنظيمها وتبويبها وعرضها في جدول؛ ليسهل فهمها وتحليلها واستخلاص النتائج منها ، ويطلق على هذا الجدول جدول التوزيع التكراري ، ويطلق على البيانات بعد عرضها في جدول توزيع تكراري بيانات مبوبة .

تعريف جدول التوزيع التكراري :

يعرف جدول التوزيع التكراري بأنه جدول ذو عمودين ، العمود الأول نقسم فيه البيانات إلى فئات مصنفة حسب النوع أو القيمة العددية والعمود الثاني نسجل فيه أمام كل فئة عدد القيم التابعة لها ، ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة .

كيفية إعداد الجداول التكرارية :

إن أول خطوة لتبويب البيانات الخام ووضعها في جداول تكرارية هي عمل ما يسمى بجدول تفرغ البيانات ، وهو جدول مقسم إلى ثلاثة أعمدة حيث إن :

- العمود الأول تدون فيه الفئات مصنفة حسب النوع أو القيمة العددية، وإذا كان ترتيب البيانات ممكناً فيجب أن تكون الفئات مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً .
- العمود الثاني خاص بالعلامات، حيث نقوم بقراءة القيم المشاهدة المذكورة في البيانات والمقصود بالقيم المشاهدة أو المشاهدات هي قيم المتغير التي حصلنا عليها من أو عن المفردات محل الدراسة عند جمع البيانات – ونضع هذه العلامة (/) أمام الفئة التي تشمل القيمة ، ولتسهيل عملية عد العلامات يستحسن أن نضع كل أربع علامات بجوار بعضها (////) أما العلامة الخامسة فتكتب عكس اتجاه العلامات الأربع على هذا النحو (/////) . وبذلك يكون لدينا حزم من العلامات كل منها يحتوي على خمس علامات .

• العمود الثالث يُسجل به عدد العلامات التابعة لكل فئة وهذا العدد هو الذي يمثل التكرار. وبذلك نكون قد حصلنا على تكرار كل فئة من فئات الجدول ، وبالطبع مجموع التكرارات يجب أن يساوي العدد الكلي للقيم المشاهدة .
وبعد الانتهاء من جدول التفريغ نستطيع معرفة جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات فهو عبارة عن العمود الأول والثالث لجدول التفريغ مع حذف العمود الخاص بالعلامات . وفيما يلي سنقوم بدراسة كيفية إعداد الجداول التكرارية لكل نوع من أنواع البيانات .

أولاً – جدول التوزيع التكراري لبيانات وصفية " كيفية " :

إذا كانت البيانات وصفية مثل مستوى التعليم ، الديانة ، الجنسية ، ... إلخ ، فإننا نصنف البيانات في فئات بحيث تمثل كل فئة صفة أو نوعاً ، ثم نقوم بإعداد جدول تفريغ البيانات ومنه نحصل على جدول التوزيع التكراري ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (1-2) :

البيانات الخام التالية توضّح المستوى الدراسي لعشرين عاملة في أحد المصانع:

أمي	إعدادي	أمي	ابتدائي	ابتدائي
ثانوي	إعدادي	إعدادي	ابتدائي	أمي
أمي	أمي	ابتدائي	ابتدائي	ابتدائي
إعدادي	ابتدائي	إعدادي	ابتدائي	إعدادي

اعرض هذه البيانات في جدول تكراري .

الحلّ :

البيانات السابقة بيانات وصفية تمثل متغيراً وصفيّاً وهو المستوى التعليمي والذي ينقسم إلى 4 أنواع هي : أمي ، ابتدائي ، إعدادي ، ثانوي ، ويمكننا أن نضعها في جدول تفريغ البيانات بحيث تمثل كل فئة مستوى تعليمياً مع ترتيب الفئات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ، وعندها سيكون لدينا 4 فئات ، ثم نسجل أمام كل فئة العلامات التي تمثل المفردات التي تتبعها ويكون عدد العلامات هو تكرار الفئة وبالطبع يجب أن يكون مجموع التكرارات يساوي العدد الكلي للعلامات ، و جدول (1-2) يوضح جدول تفريغ البيانات المذكورة .

جدول (1-2)

جدول تفريغ للمستويات التعليمية لعشرين عاملة

عدد العلامات (التكرار)	العلامات	المستوى التعليمي (الفئة)
5	###	أمي
8	/// ###	ابتدائي
6	/ ###	إعدادي
1	/	ثانوي
20		المجموع

ومن جدول تفريغ البيانات نحصل على جدول التوزيع التكراري المناظر عن طريق الاكتفاء بالعمود الأول والثالث وحذف العمود الخاص بالعلامات والموضح فيما يلي :

جدول (2-2)

جدول التوزيع التكراري للمستوى التعليمي لعشرين عاملة

عدد العلامات (التكرار)	المستوى التعليمي (الفئة)
5	أمي
8	ابتدائي
6	إعدادي
1	ثانوي
20	المجموع

وبعد وضع البيانات الخام في جدول تكراري أصبحت واضحة وسهلة الفهم ، فنفهم من الجدول أنه يوجد في المصنع 5 عاملات أميات ، و 8 عاملات مستواهن ابتدائي ، و 6 عاملات مستواهن إعدادي وهكذا .

ثانياً – جدول التوزيع التكراري لبيانات كمية :

(1) جدول التوزيع التكراري لبيانات منفصلة (متقطعة) :

إذا كانت البيانات كمية وتمثل متغيراً منفصلاً فتوجد طريقتان لإعداد الجداول التكرارية :

(أ) إذا كان عدد القيم المختلفة التي يأخذها المتغير عدداً محدوداً وصغيراً ، فنكون جدولاً تكرارياً تمثل كل فئة من فئاته قيمة واحدة من القيم التي يأخذها المتغير مع مراعاة ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً، ثم نقوم بإعداد جدول لتفريغ البيانات ونشتق منه جدول التوزيع التكراري .

مثال (2-2) :

إذا ألقينا 4 مكعبات نرد معا 30 مرة وحصلنا على البيانات التالية التي تمثل عدد المكعبات التي يظهر عليها الرقم 6 في كل رمية .

2, 0, 1, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 4, 1, 0
2, 1, 2, 4, 1, 0, 1, 0, 1, 3, 0, 1, 2, 0, 3

الحل :

المتغير محل الدراسة في هذا المثال هو عدد المكعبات التي يظهر عليها الرقم 6 في كل رمية ، وهو متغير عشوائى منفصل والقيم المختلفة التي يأخذها هي :

4 , 3 , 2 , 1 , 0

حيث المقصود بكل قيمة من هذه القيم ما يلي :

0 : لا يظهر الرقم 6 على أي مكعب من المكعبات الأربعة .

1 : يظهر الرقم 6 على مكعب واحد فقط من المكعبات الأربعة .

2 : يظهر الرقم 6 على مكعبين من المكعبات الأربعة .

3 : يظهر الرقم 6 على ثلاثة مكعبات من المكعبات الأربعة .

4 : يظهر الرقم 6 على المكعبات الأربعة .

وحيث إن عدد القيم المختلفة التي يأخذها المتغير يساوي 5 وهو عدد محدود وصغير وبالتالي سنجعل كل فئة من فئات جدول التوزيع التكراري تمثل قيمة واحدة فقط من هذه القيم ، وسيكون جدول تفريغ البيانات كما يلي :

جدول (2-3)

جدول تفريغ عدد المكعبات التي ظهر عليها الرقم 6 في ثلاثين رمية.

عدد الرميات (التكرار)	العلامات	عدد المكعبات التي ظهر عليها الرقم 6 (الفئة)
9	//// ///	0
10	/// ///	1
6	/ ///	2
3	///	3
2	//	4
30		المجموع

ومن جدول تفريغ البيانات نحصل على جدول التوزيع التكراري المناظر .

جدول (2-4)

جدول التوزيع التكراري لعدد المكعبات التي ظهر عليها الرقم 6 في ثلاثين رمية لأربع مكعبات

عدد العوامل (التكرار)	عدد المكعبات التي ظهر عليها الرقم 6 (الفئة)
9	0
10	1
6	2
3	3
2	4
30	المجموع

ومن جدول التوزيع التكراري نفهم بسهولة أن عدد الرميات التي لم يظهر فيها الرقم 6 على أي مكعب من المكعبات الأربعة هي 9 رميات من 30 رمية وعدد الرميات التي ظهر فيها الرقم 6 على مكعب واحد فقط من المكعبات الأربعة هي 10 رميات وهكذا ... وهذا لا يمكن

فهمه من البيانات الخام بسهولة بالإضافة إلى أننا نستطيع حساب مقاييس إحصائية مهمة وكثيرة عند وضع البيانات الخام في صورة جدول توزيع تكراري .
(ب) إذا كانت البيانات المنفصلة تمثل متغيراً منفصلاً يأخذ عدداً كبيراً من القيم، ففي هذه الحالة نجعل كل فئة في الجدول تمثل عدداً من القيم أي مجموعة من القيم بدلاً من قيمة واحدة ، وذلك حتى لا يكون الجدول مطولاً مما يؤدي إلى تشتت المعلومات فيه ، ولتكوين الجدول التكراري في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية :

خطوات إنشاء جداول التوزيعات التكرارية :

1- نحدد المدى الذي تنتشر فيه القيم المشاهدة للبيانات، وذلك بطرح أصغر قيمة في البيانات (الحد الأدنى للبيانات الخام) من أكبر قيمة فيها (الحد الأعلى للبيانات الخام) ويرمز له بالرمز (R) .

$$\text{المدى} = \text{الحد الأعلى للبيانات} - \text{الحد الأدنى للبيانات}$$

$$R = \text{max value} - \text{min value}$$

2- نقسم المدى إلى عدد من الفئات وعادة يفضل أن يتراوح عددها من 5 إلى 15 فئة ، ويفضل أن تكون متساوية الطول ، والمقصود بطول الفئة في حالة المتغير المنفصل هو عدد القيم التي تمثلها الفئة ، ونقوم بتحديد طول الفئة كما يلي :

$$\text{طول الفئة} = \text{المدى} \div \text{عدد الفئات}$$

$$\text{أو } L = R/N \text{ ، حيث (N) عدد الفئات}$$

وإذا كان خارج القسمة كسراً فنستعمل العدد الصحيح الأكبر منه مباشرة حتى لا تكون حدود فئات الجدول محتوية على كسور مما يجعل الجدول في صورة معقدة وغير واضحة ويرمز لطول الفئة بالرمز (L) .

3- بعد تحديد طول الفئة نحدد الحد الأدنى والحد الأعلى لكل فئة ، حيث يكون الحد الأدنى للفئة الأولى أقل أو يساوي أصغر قيمة مشاهدة في البيانات الخام ، والحد الأعلى للفئة الأخيرة أكبر من أو يساوي أكبر قيمة مشاهدة في البيانات الخام ، وذلك حتى نضمن بأن فئات الجدول التكراري ستشمل كل القيم المشاهدة .

4- نكوّن جدول تفرغ البيانات الذي تحدثنا عنه سابقاً ، ومنه نشق جدول التوزيع التكراري عن طريق الاكتفاء بالعمود الأول والثالث وحذف العمود الخاص بالعلامات . والمثال

التالي يوضح هذه الخطوات .

مثال (2-3) :

البيانات التالية تمثل عدد زبائن محل تجاري في إحدى المدن يومياً خلال شهرين متتاليين :

40	57	60	55	52	50	45	38	41	39
44	53	56	36	35	60	50	52	44	40
54	46	45	49	41	48	50	49	47	55
47	48	47	62	58	54	48	46	45	51
41	43	36	39	44	46	48	49	51	58
49	46	43	47	48	61	39	38	43	44

اعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من 6 فئات متساوية الطول .

الحل :

لتكوين جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات نتبع الخطوات المذكورة سابقاً ، وذلك كما يلي :

• نحدد الحد الأعلى والحد الأدنى للبيانات ثم نحسب قيمة المدى ، فنجد أن :

$$\text{الحد الأعلى} = 62 ، \quad \text{الحد الأدنى} = 35$$

$$\text{إذن : المدى} = 62 - 35 = 27 \quad \text{أو} \quad R = 62 - 35 = 27$$

• بما أننا نريد تقسيم هذا المدى إلى 6 فئات فسيكون طول كل فئة كما يلي :

$$\text{طول الفئة} = 27 \div 6 = 4 \frac{3}{6} \quad \text{أو} \quad L = 27 \div 6 = 4 \frac{3}{6}$$

وعندها يكون طول الفئة مساوياً 5 ، أي كل فئة تمثل 5 قيم من القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير .

حيث إن أقل قيمة في البيانات 35 فسيكون الحد الأدنى للفئة الأولى 35 ، وبما أن طول

الفئة يساوي 5 ، إذن الفئة الأولى ستمثل القيم التالية :

$$35 ، 36 ، 37 ، 38 ، 39$$

وبالتالي يكون الحد الأعلى للفئة الأولى مساوياً 39، وتكتب هذه الفئة كما يلي :

35 – 39 ، أي تمثل قيم المتغير من 35 إلى 39 (بما فيها 35 و 39)، وبنفس الطريقة نكتب

الفئات الأخرى ، وعندئذ ستكون الفئات الست هي :

39 - 35	وتمثل القيم 35 ، 36 ، 37 ، 38 ، 39 .
44 - 40	وتمثل القيم 40 ، 41 ، 42 ، 43 ، 44 .
49 - 45	وتمثل القيم 45 ، 46 ، 47 ، 48 ، 49 .
54 - 50	وتمثل القيم 50 ، 51 ، 52 ، 53 ، 54 .
59 - 55	وتمثل القيم 55 ، 56 ، 57 ، 58 ، 59 .
64 - 60	وتمثل القيم 60 ، 61 ، 62 ، 63 ، 64 .

كما ذكرنا سابقاً أن الحد الأعلى للفئة الأخيرة يجب أن يساوي أو يزيد عن أكبر قيمة في البيانات الخام ، نحدد عدد القيم المشاهدة التابعة لكل فئة من الفئات الستة ؛ أي نحدد تكرار كل فئة ، وذلك باستخدام جدول تفريغ البيانات المشار إليه سابقاً ، فنمثل القيمة المشاهدة الأولى في البيانات وهي 39 بعلامة أمام الفئة التي تحتويها وهي الفئة الأولى ، والقيمة الثانية وهي 41 بعلامة أمام الفئة التي تحتويها وهي الفئة الثانية ، والقيمة الثالثة وهي 38 نمثلها بعلامة أمام الفئة الأولى ، ... وهكذا ، فنحصل على جدول تفريغ البيانات التالي :

جدول (5-2)

جدول تفريغ لعدد الزبائن لمحل تجاري في 60 يوماً

الفئة	العلامات	التكرار
39 – 35	/// ###	8
44 – 40	// ### ###	12
49 – 45	### ### ### ###	20
54 – 50	### ###	10
59 – 55	/ ###	6
64 - 60	////	4
المجموع		60

ومن جدول تفريغ البيانات نحصل على جدول التوزيع التكراري المناظر عن طريق الاكتفاء بالعمود الأول والثالث وحذف العمود الخاص بالعلامات، وذلك كما هو واضح في جدول (2 - 6).

جدول (2-6)

جدول التوزيع التكراري لزبائن محل تجاري في 60 يوماً

عدد الزبائن (الفئة)	عدد الأيام (التكرار)
39 – 35	8
44 – 40	12
49 – 45	20
54 – 50	10
59 – 55	6
64 - 60	4
المجموع	60

وبسهولة نفهم من هذا الجدول أنه في 8 أيام من هذين الشهرين كان عدد زبائن هذا المحل يتراوح بين 35 إلى 39 زبوناً، وفي 12 يوماً كان عدد الزبائن يتراوح بين 40 إلى 44 وهكذا ... وهذه المعلومات بالطبع لم تكن واضحة عندما كانت البيانات خاماً أي غير مبوبة في جدول تكراري .

(2) جدول التوزيع التكراري لبيانات متصلة (مستمرة) :

إذا كانت البيانات كمية وتمثل متغيراً متصلاً ، فلقد علمنا سابقاً أن المتغير المتصل يمكنه أن يأخذ كل القيم الموجودة بمدى معين ، لذلك عند إعداد جدول تكراري لبيانات تمثل متغيراً متصلاً سنتعامل مع فترات وليس مع قيم محددة كما في حالة المتغير المنفصل ، أي كل فئة ستمثل فترة بها عدد لا نهائي من القيم المتصلة ، ولتكوين هذا الجدول نتبع نفس الخطوات المذكورة سابقاً في حالة المتغير المنفصل مع مراعاة الفرق بين النوعين عند وضع حدود الفئات .

في المثال السابق كان المتغير عبارة عن عدد الزبائن وهو متغير منفصل ، ولذلك قسمنا الفئات بحيث إن الفئة الأولى تبدأ من 35 وتنتهي عند 39 ، والفئة الثانية تبدأ من 40 وتنتهي عند 44 ، لأن المتغير في هذا المثال لا يأخذ القيم المحصورة بين 39 و 40 كالقيمة 39.72 مثلاً ، ولكن هذا التقسيم الذي يحتوي على فجوات بين الفئات لا يناسب المتغير المتصل؛ لأن المتغير المتصل يمكنه أن يأخذ أي قيمة بين الحد الأدنى والحد الأعلى للبيانات ، لذلك عند تكوين جدول التوزيع التكراري لمتغير متصل يجب أن نجعل كل الفئات متصلة ببعضها وليس

بينها فجوات ، فكل فئة تنتهي عند بداية الفئة اللاحقة لها ، وبذلك تكون الفئات شاملة لجميع القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المتصل .
وطول الفئة في حالة المتغير المتصل هو طول الفترة أو المسافة التي تمثلها هذه الفئة ، ونحصل على طول الفئة بطرح حدها الأدنى من حدها الأعلى ، أي أن :

$$\text{طول الفئة} = \text{الحد الأعلى للفئة} - \text{الحد الأدنى للفئة}$$

ويفضل أن يكون طول الفئة خالياً من الكسور لتسهيل فهم الجدول وتسهيل العمليات الحسابية اللازمة عند حساب المقاييس الإحصائية ، وعند ظهور كسر نقره إلى أعلى ، فمثلاً إذا كان طول الفئة يساوي 7.23 فنعتبره 8 وهكذا
ثم نقوم بتحديد حدود الفئات ، فيجب أن يكون الحد الأدنى مساوياً أقل قيمة في البيانات وإذا كانت أقل قيمة تحتوي على كسر فنعتبر القيمة الصحيحة التي أقل منها مباشرة كحد أدنى للفئة الأولى، وذلك لتسهيل الجدول وتسهيل العمليات الحسابية ، ثم نكوّن جدول تفرغ للبيانات ونحدد تكرار كل فئة بطريقة العلامات المذكورة سابقاً . ثم نشق منه جدول التوزيع التكراري عن طريق الاكتفاء بالعمود الأول والثالث وحذف العمود الخاص بالعلامات .

مثال (2-4) :

البيانات التالية تمثل الراتب الأسبوعي بالدينار لثلاثين موظفاً من الموظفين العاملين بإحدى الشركات :

50.239	51.020	71.312	65.981	56.801	55.231
75.021	62.839	50.231	35.900	59.012	70.900
55.923	55.210	48.311	55.212	54.999	74.923
60.100	57.390	77.610	49.201	64.981	71.231
60.998	66.000	62.321	40.230	59.030	30.510

المطلوب عرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري يتكون من 5 فئات .

الحل :

في هذا المثال المتغير محل الدراسة هو راتب الموظف وهو متغير متصل ، ولتكوين جدول التوزيع التكراري لهذا المتغير سنتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في المثال (2 - 3) مع مراعاة تحديد حدود الفئات بالطريقة التي تلائم المتغير المتصل ، وذلك كما يلي :

- نحدد الحد الأعلى والحد الأدنى للبيانات ثم نحسب قيمة المدى ، فنجد أن :
الحد الأدنى = 30.510 (أقل راتب في البيانات)
الحد الأعلى = 77.610 (أعلى راتب في البيانات)
المدى = 77.610 - 30.510 = 47.100

- إذا أردنا تقسيم هذا المدى إلى 5 فئات فسيكون طول كل فئة كما يلي :
طول الفئة = $47.100 \div 5 = 9.420$

وعندئذ سنعتبر طول الفئة (الفترة) مساوياً 10 ، وحيث إن الحد الأدنى في البيانات 30.510 ، فنستطيع أن نجعل الفئة الأولى تبدأ من العدد الصحيح الأقل من الحد الأدنى مباشرة وذلك لتسهيل صورة الجدول . وبالتالي سيكون الحد الأدنى للفئة الأولى مساوياً 30 ، وحيث إن طول الفئة يساوي 10 ، فستكون الفئات كما يلي :

30 إلى أقل من 40

40 إلى أقل من 50

50 إلى أقل من 60

60 إلى أقل من 70

70 إلى أقل من 80

وبكتابة الفئات بهذه الطريقة لن يكون لدينا فجوات تفصل الفئات وبالتالي نكون قد عبرنا عن المتغير المستمر بطريقة صحيحة .

بعد تحديد الفئات ، نقوم بتكوين جدول تفرغ البيانات الموضح فيما يلي :

جدول (7-2)

جدول تفرغ لمرتبات ثلاثين موظفاً بالشركة

التكرار	العلامات	الفئة
2	//	30 إلى أقل من 40
3	///	40 إلى أقل من 50
12	// ###	50 إلى أقل من 60
7	// ###	60 إلى أقل من 70
6	/ ###	70 إلى أقل من 80
30		المجموع

ويكون جدول التوزيع التكراري للراتب الأسبوعي لثلاثين موظفاً ، كما يلي :

جدول (2-8)

جدول التوزيع التكراري للراتب الأسبوعي بالدينار لثلاثين موظفاً

الراتب الأسبوعي بالدينار (الفئة)	عدد الموظفين (التكرار)
30 إلى أقل من 40	2
40 إلى أقل من 50	3
50 إلى أقل من 60	12
60 إلى أقل من 70	7
70 إلى أقل من 80	6
المجموع	30

مركز الفئة :

مركز الفئة هو القيمة الواقعة في منتصفها ، ويحسب كما يلي :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

ونطبق هذه الصيغة سواء كانت البيانات منفصلة أم متصلة ، فمثلاً في المثال (2 - 3) الخاص ببيانات منفصلة ، فإن مركز الفئة الأولى يحسب كما يلي :

$$37 = \frac{39+35}{2} ، وهكذا بالنسبة لمراكز بقية الفئات .$$

وفي المثال (2 - 4) الخاص ببيانات متصلة ، فإن مركز الفئة الأولى يحسب كما يلي :

$$35 = \frac{40+30}{2} ، وهكذا بالنسبة لمراكز بقية الفئات .$$

ومركز الفئة هو عبارة عن قيمة نظرية أي: ليس بالضروري أن يأخذها المتغير محل الدراسة ، وفي العمليات الحسابية اللازمة لبعض المقاييس الإحصائية تستعمل قيمة مركز الفئة كممثل عن كل القيم التي تحتويها الفئة ، فمثلاً في الجدول التكراري (2 – 8) الفئة الأولى تبدأ من 30 إلى أقل من 40 وتكرارها مساوٍ 2، فهذا يعني أن موظفين راتبهما الأسبوعي في هذه الفئة ولكن لا يوضح الجدول التكراري راتب كل موظف منهما ، وبافتراض أن المفردات موزعة توزيعاً عادلاً داخل كل فئة فنعتبر أن كل راتب مساوٍ لمركز الفئة والذي يساوي 35 وبالتالي سيكون مجموع الرواتب الأسبوعية للموظفين التابعين للفئة الأولى مساوياً $2 \times 35 = 70$ ديناراً ، وب نفس الطريقة نستطيع أن نحسب المجموع الكلي للرواتب الأسبوعية للموظفين التابعين لأي فئة في الجدول التكراري، وذلك بضرب مركز الفئة في تكرارها ، وبجمع مجاميع الرواتب الخاصة بجميع الفئات نحصل على المجموع الكلي للرواتب الأسبوعية لثلاثين موظفاً.

ونستعمل هذه المجاميع عند حساب كثير من المقاييس الإحصائية . كما سنلاحظ في الفصول القادمة من هذا الكتاب .

الجدول غير المنتظمة :

يسمى جدول التوزيع التكراري جدولاً غير منتظم إذا كانت فئاته غير متساوية الطول ، أما إذا كانت فئاته ذات أطوال متساوية فيسمى الجدول جدولاً منتظماً . وعادة تفضل الجداول المنتظمة لسهولة التعامل معها حسابياً عند حساب المقاييس الإحصائية المختلفة ، ولكن أحياناً تكون البيانات مركزة في جزء من التوزيع بينما مبعثرة في الأجزاء الأخرى ، فإذا جعلنا أطوال الفئات متساوية فسنجد أن كثيراً من الفئات خالية من التكرارات ولهذا يفضل أن تكون الفئات غير متساوية الطول فنجعل الفئات في الأجزاء التي تتركز فيها القيم ذات طول قصير بينما تكون الفئات في الأجزاء التي تتبعثر فيها القيم أوسع .

كذلك نضطر لتكوين جدول غير منتظم إذا أردنا توضيح خصائص معينة للمتغير محل الدراسة ، فمثلاً عند تكوين جدول تكراري لدرجات امتحان في مادة من المواد لتوضيح تقديرات الطلبة ، فسيكون هذا الجدول غير منتظم، وذلك لأن الفئات الخاصة بالتقديرات غير متساوية الطول حيث :

تقدير جيد	65 – 74	تقدير ضعيف جداً	0 – 29
تقدير جيد جداً	75 – 84	تقدير ضعيف	30 – 49
تقدير ممتاز	85 – 100	تقدير مقبول	50 – 64

الجدول المفتوحة :

يسمى جدول التوزيع التكراري جدولاً مفتوحاً إذا لم يُحدد الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة الأخيرة أو كلاهما ، وذلك لعدم توفر البيانات اللازمة لتحديد البداية أو النهاية ، أو نظراً لوجود قيم قليلة متباعدة في أعلى التوزيع أو أسفله .

والجدول المفتوح من طرفه الأدنى هو الجدول الذي يكون فيه الحد الأدنى للفئة الأولى غير محدد ، والجدول المفتوح من طرفه الأعلى هو الجدول الذي يكون فيه الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير محدد ، أما إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى غير محدد والحد الأعلى للفئة الأخيرة غير محدد فيكون الجدول مفتوحاً من الطرفين ، ويمكن توضيحها بالأمثلة التالية:

أقل من 5	5 – 1	أقل من 5
10 – 6	10 – 6	10 – 6
15 – 11	15 – 11	15 – 11
20 – 16	20 – 16	20 – 16
21 أو أكثر	21 أو أكثر	25 – 21

مفتوح من الطرفين

مفتوح من طرفه الأعلى

مفتوح من طرفه الأدنى

(2-2) جداول التوزيعات التكرارية المتجمعة :

التوزيعات التكرارية العادية التي درسناها في البند السابق توضح لنا عدد المفردات التابعة لكل فئة من فئات الجدول على حدة، ولكننا أحياناً نرغب في معرفة عدد المفردات التي قيمتها أقل من قيمة معينة أو عدد المفردات التي قيمتها أكثر من أو تساوي قيمة معينة ، فمثلاً في المثال (2 – 4) قد يهمنا معرفة عدد الموظفين الذين مرتباتهم أقل من 50 ديناراً أسبوعياً أو عدد الموظفين الذين مرتباتهم 50 أو أكثر ، ولتوضيح معلومات كهذه يجب وضع التوزيع التكراري في شكل آخر يطلق عليه التوزيع التكراري المتجمع ويوجد نوعان من التوزيعات التكرارية المتجمعة وهي :

1 – التوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

يوضح التوزيع التكراري المتجمع الصاعد عدد المفردات التي قيمتها أقل من الحد الأدنى لأي فئة من فئات جدول التوزيع التكراري العادي ، فمثلاً في مثال (2 – 4) نجد أن عدد الموظفين الذين راتبهم الأسبوعي أقل من 30 ديناراً يساوي صفراً ، أي لا يوجد

موظفون يتقاضون أقل من هذه القيمة ، أما عدد الموظفين الذين راتبهم الأسبوعي أقل من 40 ديناراً يساوي 2، وهو عدد الموظفين التابعين للفئة الأولى وبالنسبة لعدد الموظفين الذين راتبهم أقل من 50 يساوي $(5 = 3 + 2)$ ، وهم الموظفون التابعون للفئة الأولى والفئة الثانية ، وهكذا نستمر في عملية التجميع إلى أن نحصل على عدد الموظفين الذين يتقاضون أقل من الحد الأدنى لكل فئة وبالتالي سنحصل على ما يسمى بجدول التكرار المتجمع الصاعد ، وقد سمّي بالصاعد لأن قيمة التكرار في صعود مستمر ، وعند تكوين هذا النوع من الجداول نفترض وجود فئة أكبر من الفئة الأخيرة في جدول التوزيع التكراري العادي ، وبالتالي تكون كل المفردات قيمتها أقل من الحد الأدنى لهذه الفئة ، وسنجد أن أي جدول تكراري متجمع صاعد يبدأ من الصفر وينتهي بالعدد الكلي للمفردات ، والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (2-5) :

كون جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد للمثال $(2 - 4)$ الخاص بالراتب الأسبوعي لثلاثين موظفاً .

الحل :

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد للموظفين الذين مرتباتهم الأسبوعية أقل من قيمة معينة :

جدول (2-9)

الراتب الأسبوعي بالدينار (الفئة)	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 30	0
أقل من 40	2
أقل من 50	5 $(3 + 2)$
أقل من 60	17 $(12 + 3 + 2)$
أقل من 70	24 $(7 + 12 + 3 + 2)$
أقل من 80	30 $(6+7+12+3+2)$

2 - التوزيع التكراري المتجمع الهابط :

التوزيع التكراري المتجمع الهابط يوضح عدد المفردات التي قيمتها تساوي أو أكثر من الحد الأدنى لأي فئة من فئات جدول التوزيع التكراري العادي ، فمثلاً في مثال $(2 - 4)$ نجد أن عدد الموظفين الذين راتبهم الأسبوعي 30 أو أكثر هو 30، وهو عبارة عن تكرار الفئة

الأولى مضافاً إليه تكرارات كل الفئات اللاحقة بها ، وفي نفس الوقت هو عبارة عن العدد الكلي للموظفين، لأن كل الموظفين الذين تمثلهم القيم المشاهدة للبيانات المتوفرة لدينا يتقاضون أسبوعياً 30 ديناراً أو أكثر ، أما عدد الموظفين الذين راتبهم الأسبوعي 40 أو أكثر يساوي 28 موظفاً ، وهم عدد الموظفين التابعين للفئة الثانية والفئات اللاحقة بها ، وهكذا نستطيع أن نحسب عدد المفردات التي قيمتها تساوي أو أكثر من الحد الأدنى لكل فئة وذلك بجمع تكرار الفئة التي نتعامل مع حدها الأدنى مع تكرارات كل الفئات اللاحقة بها ، ولذلك سمي بالتكرار المتجمع ، وسمي بالهابط ؛لأن قيمة التكرار في هبوط مستمر ، وهنا كذلك نفترض وجود فئة أكبر من الفئة الأخيرة في جدول التوزيع التكراري العادي ، وبالتالي يكون عدد المفردات التي قيمتها تساوي الحد الأدنى لهذه الفئة أو أكثر منه هو صفر ، وبالتالي سنجد أن أي جدول تكراري متجمع هابط يبدأ من العدد الكلي للتكرارات وينتهي بالصفر ، وذلك كما هو موضح بالمثال التالي :

مثال (2-6) :

كۆن جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط في مثال (2 - 4) .

الحل :

الجدول التالي يبين التوزيع التكراري المتجمع الهابط للموظفين الذين راتبهم الأسبوعي يساوي أو أكثر من قيمة معينة :

جدول (2-10)

الراتب الأسبوعي بالدينار (الفئة)	التكرار المتجمع الهابط
30 أو أكثر	30
40 أو أكثر	28
50 أو أكثر	25
60 أو أكثر	13
70 أو أكثر	6
80 أو أكثر	0

ونستطيع وضع جدول التكرار المتجمع الصاعد و جدول التكرار المتجمع الهابط في جدول واحد، فإذا وضعنا جدول (2 - 9) و جدول (2 - 10) معاً فسنحصل على ما يلي :

جدول (2-11)

الفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الفئة	التكرار المتجمع الهابط
أقل من 30	0	30 أو أكثر	30
أقل من 40	2	40 أو أكثر	28
أقل من 50	5	50 أو أكثر	25
أقل من 60	17	60 أو أكثر	13
أقل من 70	24	70 أو أكثر	6
أقل من 80	30	80 أو أكثر	0

ونلاحظ من هذا الجدول أن مجموع التكرارين الصاعد والهابط المتقابلين يساوي دائماً المجموع الكلي للتكرارات ، وبالتالي نستطيع أن نستنتج أحد الجدولين بمعرفة الجدول الآخر .

(2-3) جداول التوزيعات التكرارية النسبية :

نستطيع حساب التكرار النسبي لجميع جداول التوزيعات التكرارية سواء خاصة ببيانات وصفية أو بيانات كمية ، وسواء كانت عادية أو متجمعة ، فصفة عامة التكرار النسبي لأي فئة نحصل عليه بقسمة تكرار هذه الفئة على العدد الكلي للملاحظات (التكرارات) أي أن :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{العدد الكلي للملاحظات (التكرارات)}}$$

ويمكن التعبير عن التكرار النسبي بكسر عشري أو نسبة مئوية .

مثال (2-7) :

أوجد جدول التكرار النسبي لجدول التوزيع التكراري في المثال (2 - 1) الذي يمثل المستوى الدراسي لعشرين عاملة في أحد المصانع .

الحل :

في المثال (2 - 1) الخاص بالمستوى التعليمي لعشرين عاملة ، نجد أن :

$$\text{التكرار النسبي للفئة الأولى} = \frac{5}{20} = 0.25$$

أي أن 25 % من العلامات أميات ، وبنفس الطريقة نستطيع أن نحسب التكرار النسبي لجميع الفئات بالجدول، وبالتالي نحصل على الجدول التالي :

جدول (2-12)

التكرار النسبي	المستوى التعليمي (الفئة)
0.25	أمي
0.40	ابتدائي
0.30	إعدادي
0.05	ثانوي
1.00	المجموع

ومن جدول (2 - 12) نفهم أن 25 % من العلامات أميات، 40 % يحملن الشهادة الابتدائية، 30% يحملن الشهادة الإعدادية ، و5% يحملن الشهادة الثانوية ، ويمكن كتابة التكرار النسبي على شكل نسب مئوية بدلاً من كسور عشرية ، وفي هذه الحالة سيكون المجموع 100% .

مثال (2-8) :

أوجد التكرار النسبي لجدول التوزيع التكراري في مثال (2 - 3) الذي يمثل عدد زبائن محل تجاري خلال شهرين .

الحل :

في المثال (2 - 3) الخاص بعدد الزبائن لمحل تجاري ، نجد أن :

$$\text{التكرار النسبي للفئة الأولى} = \frac{8}{60} = 0.13$$

أي أن حوالي 13% من الأيام كان عدد الزبائن فيها يتراوح من 35 إلى 39 . وبنفس الطريقة نستطيع أن نحسب التكرار النسبي لجميع الفئات بالجدول ، وبالتالي نحصل على الجدول التالي :

جدول (2-13)

عدد الزبائن (الفئة)	التكرار النسبي
39 – 35	0.13
44 – 40	0.20
49 – 45	0.33
54 – 50	0.17
59 – 55	0.10
64 - 60	0.07
المجموع	1.00

مثال (2-9) :

كوّن جدول التكرار المتجمّع الصاعد النسبي للمثال (2 – 5) ، و جدول التكرار المتجمع الهابط النسبي للمثال (2 – 6) .

الحل :

من جدول (2 – 9) بالمثال (2 – 5) نجد أن :
التكرار المتجمع الصاعد لعدد الموظفين الذين راتبهم أقل من 60 هو 17 ، وبالتالي فإن :
التكرار المتجمع الصاعد النسبي لعدد الموظفين الذين راتبهم أقل من 60

$$\text{هو } 0.57 = \frac{17}{30}$$

وبنفس الطريقة نستطيع الحصول على التكرار المتجمع النسبي لجميع فئات جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد ولجميع فئات جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط الموضح في جدول (2 – 10) بالمثال (2 – 6) ، وعندئذ نحصل على الجدولين التاليين:

جدول (2-15)

المتكرر النسبي	الفئة
1.00	30 أو أكثر
0.93	40 أو أكثر
0.83	50 أو أكثر
0.43	60 أو أكثر
0.20	70 أو أكثر
0.00	80 أو أكثر

جدول (2-14)

المتكرر النسبي	الفئة
0.00	أقل من 30
0.07	أقل من 40
0.17	أقل من 50
0.57	أقل من 60
0.80	أقل من 70
1.00	أقل من 80

تمارين (2)

1- البيانات التالية تمثل هوايات 40 طالباً :

قراءة	رياضة	رياضة	رياضة	موسيقى	رسم	رياضة	قراءة
رياضة	موسيقى	رياضة	قراءة	رسم	قراءة	رياضة	رسم
رسم	رياضة	موسيقى	رياضة	رياضة	رسم	رياضة	رياضة
قراءة	رسم	رياضة	قراءة	رسم	قراءة	رسم	رياضة
قراءة	قراءة	رياضة	رسم	موسيقى	رياضة	رياضة	رياضة

أعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري ، ثم أحسب التكرار النسبي .

2- البيانات التالية تبين تقديرات 30 طالباً في مادة الرياضيات :

مقبول ، جيد ، ضعيف ، جيد جداً ، ضعيف ، جيد ، مقبول ، ممتاز ، جيد ،
مقبول ، جيد ، ضعيف ، ضعيف ، جيد ، جيد ، جيد جداً ، مقبول ، مقبول ،
ضعيف ، مقبول ، جيد ، ضعيف ، مقبول ، جيد جداً ، جيد ، مقبول ، ضعيف ،
مقبول ، ضعيف ، ممتاز .

أ – أعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري .

ب – أوجد جدول التكرار النسبي .

3- من سجلات إحدى الشركات ، وُجد أن عدد الغائبين من العاملين خلال شهر كان كما يلي :

1 ، 0 ، 1 ، 1 ، 3 ، 5 ، 4 ، 0 ، 2 ، 1 ، 3 ، 0 ، 0 ، 2 ، 3

1 ، 2 ، 1 ، 0 ، 2 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 4 ، 0 ، 0 ، 2 ، 2 ، 1

أعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري بحيث كل فئة تمثل قيمة واحدة فقط ، ثم أوجد جدول التكرار النسبي لعدد الغائبين .

4- البيانات التالية تبين المبيعات الأسبوعية من السيارات خلال 50 أسبوعاً لأحد معارض السيارات :

1، 2، 2، 2، 3، 1، 0، 3، 3، 1، 0، 2، 1، 4، 0، 4، 1، 2
 2، 4، 3، 1، 3، 1، 1، 1، 1، 2، 3، 0، 4، 3، 0، 2، 2، 1
 2، 1، 2، 1، 0، 1، 1، 3، 2، 0، 2، 2، 1، 0 .

أ – أعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري بحيث كل فئة تمثل قيمة واحدة فقط .

ب – أوجد جدول التكرار النسبي لعدد السيارات المبيعة أسبوعياً .

5- البيانات التالية تبين عدد المدرسين في 25 مدرسة ابتدائية في إحدى المدن :

29، 29، 18، 25، 21، 31، 28، 27، 23، 24، 30
 26، 22، 28، 27، 23، 24، 26، 26، 28، 27، 20
 30، 28، 26

أ – كَوّن جدول توزيع تكراري لهذه البيانات وذلك باستخدام 5 فئات متساوية في الطول .

ب – أوجد جدول التوزيع التكراري النسبي .

ج – أوجد جدول التكرار المتجمع الصاعد لهذه البيانات .

د – من الجدول الذي تحصلت عليه في (ج) أوجد جدول التكرار المتجمع الهابط لهذه البيانات .

6- البيانات التالية تمثل درجات 50 طالباً في مادة الإحصاء :

68	65	69	12	89	71	75	18	69	72
76	87	66	39	74	69	59	67	81	24
69	72	64	59	50	62	60	51	52	63
75	30	84	80	64	49	80	60	10	77
82	73	20	63	66	72	69	15	70	70

أ – كَوّن جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات ، وذلك باستخدام 8 فئات متساوية الطول بافتراض أن الدرجات تمثل متغيراً منفصلاً .

ب – أوجد جدول التوزيع التكراري النسبي لهذه الدرجات .

ج – أوجد جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد النسبي لهذه البيانات .

7- البيانات التالية عبارة عن قيمة مبيعات أحد المحلات التجارية خلال خمسة وأربعين يوماً :

202.20	153.80	153.72	149.82	240.81	128.44
188.92	174.52	166.40	153.92	151.20	143.35
102.39	191.63	176.68	168.64	154.03	151.43
249.10	124.27	111.70	177.84	170.15	156.39
186.48	223.18	129.07	113.64	180.91	170.98
198.79	189.28	143.94	137.34	115.60	184.70
230.00	104.21	152.47	149.51	141.81	115.89
			103.20	191.62	184.04

- أ – كَوّن جدول التوزيع التكراري لهذه البيانات ، وذلك باستخدام 6 فئات متساوية الطول .
 ب – كَوّن جدول التوزيع التكراري النسبي لهذه البيانات .
 ج – أوجد جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط .
 د – أوجد جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط النسبي .

8- فيما يلي جدول التكرار المتجمع الهابط لرواتب 68 موظفاً (باعتبار أن الراتب متغير متصل) :

الفئة	التكرار المتجمع الهابط
240 أو أكثر	68
250 أو أكثر	60
260 أو أكثر	50
270 أو أكثر	34
280 أو أكثر	20
290 أو أكثر	8
300 أو أكثر	0

- أ – كَوّن جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد النسبي .
- ب – كَوّن جدول التوزيع التكراري العادي لرواتب الموظفين .
- ج – كَوّن جدول التوزيع التكراري النسبي لرواتب الموظفين .
- 9- فيما يلي جدول التوزيع التكراري لعدد الأطفال لدى 55 عائلة :

عدد الأطفال (الفئة)	3 - 0	7 - 4	11 - 8	15 - 12	19 - 16
عدد العائلات (التكرار)	10	24	11	7	3

- أ – كَوّن جدول التوزيع التكراري النسبي .
- ب – كَوّن جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد النسبي .
- ج – كَوّن جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط النسبي .