Mathematics I

د. عماد

كلية المنصور الجامعة

Civil Engineering
1st. Year

Complex Numbers الاعداد المعقدة (المركبة).

①

Number Systems

1. Natural Numbers and Integers: The Counting numbers $1, 2, 3, \ldots,$ are called the natural numbers (الاعداد الطبيعية) or the positive integers. The number zero and the negative integers are added to the positive integers to form the system of all integers

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

This system of numbers is closed under the operations of addition and multiplication. That is, if m and n are any integers, then

$$m+n=p \quad \text{and} \quad mn=q$$

are also integers.

In the system of all integers, we can solve equations of the form

$$x+a=0, \quad \ldots (1)$$

where a may be any integer.

2. Rational Numbers (الاعداد النسبية): The second system introduces fraction: which are just ordered pairs m/n of integers m and n. We can have all ratios of integers, excluding those having zero in the denominator. This system is called the set of rational numbers. By this system the rational operations of arithmetic may be performed they are

1. (a) addition
   (b) subtraction

2. (a) multiplication
   (b) division

In the system of all rational numbers, we can solve all equations of the form

$$ax+b=0 \qquad --- (2)$$

provided a and b are rational numbers and $a \neq 0$.

3. Irrational Numbers: Some numbers, such as $\sqrt{2}$, cannot be expressed as the ratio of two integer multiples of some other, more fundamental unit. That's we can not find a rational number solution of the eq. $x^2=2$, because there is no rational number whose square is 2. Numbers such as $\sqrt{2}$ are called irrational numbers.

If we add to the system above, the system of rational numbers, we arrive at the system of all real numbers.

In the system of all real numbers, we can solve all the eq.s in (1) and (2), and all quadratic equations

$$ax^2+bx+c=0$$

having $a \neq 0$ and $b^2-4ac \geq 0$.

4. Complex Numbers:

The solution of the quadratic equations

$$x^2+1=0 \quad \text{or} \quad ax^2+bx+c=0 \quad \text{when} \quad b^2-4ac<0$$

involves the use of the system of complex numbers $a+ib$

The symbol i is then defined as $i=\sqrt{-1}$ or $i^2=-1$.

We may use a notation such as (a,b). Then it might be said that the complex number system consists of all ordered pairs of real numbers (a,b), with the rules by which they are to be equated, added, multiplied, and so on. We shall use both the (a,b)-notation and the notation $a+ib$. We call a the real part, and b the immaginary part of (a,b).

Complex Number العدد المعقد

يعرف العدد المعقد Z بانه زوج مرتب $Z=(x,y)$ حيث ان x , y عددان حقيقيان والخاضعات لعمليتي الجمع والضرب وكالتالي :-

اذا كان $Z_1=(x_1,y_1)$ ، $Z_2=(x_2,y_2)$ فان

$$Z_1+Z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$$

$$Z_1\cdot Z_2=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2\ ,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

الازواج المرتبة بالصيغه $(0,y)$ تسمى بالاعداد الخياليه الصرفة (Pure Imaginary numbers) والازواج المرتبة بالصيغه $(x,0)$ تسمى بالاعداد الحقيقية وتكتب بالصيغه x ويرمز لمجموعة الاعداد المعقده $\mathbb{C}$.

ويسمى x بالجزء الحقيقي للعدد المعقد $Z=(x,y)$ ويرمز له $Re(Z)$

ويسمى y بالجزء التخيلي للعدد المعقد $Z=(x,y)$ ويرمز له $Im(Z)$

اي ان

$$X=Re(Z) \quad \text{و} \quad y=Im(Z)$$

ملاحظة

الازواج المرتبة $(0,0)$ هو العدد الحقيقي صفر .

يمكن كتابة كل عدد معقد $Z=(x,y)$ بالصيغة

$$\begin{aligned}Z=(x,y)&=(x,0)+(0,y)\\&=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)\\&=x+iy\end{aligned}$$

حيث ان $i=(0,1)$

ملاحظة :

$$i^2=-1$$

Example The complex number $Z=(2,3)$ can be written as

$Z=2+i3$

where $Re(Z)=2$ and $Im(Z)=3$.

By using the multiplication rule of complex number, we find

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

In general i^n (where n is positive integer number) equal $1, i, -1, -i$ when $n = 0, 1, 2, 3$ respectively

properties

(١) يكون العدد المعقد z مساوياً للصفر اذا وفقط اذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي صفراً

$$z = x + iy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ and } y = 0$$

(٢) يتساوى العددان المعقدان اذا وفقط اذا تساوى جزئيهما الحقيقيان وتساوى جزئيهما الخياليان . أي ان

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ and } y_1 = y_2$$

العمليات الأربعة على الاعداد المعقدة (المركبة)

تتم عمليات الجمع والطرح وقسمة وضرب الاعداد المعقدة باتباع قواعد الجمع والطرح والضرب والقسمة للاعداد الحقيقية مع ملاحظة $(i^2 = -1)$ على النحو الاتي

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) .$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

حاصل قسمة العدد z_1 على العدد z_2 $(z_2 \neq 0)$ يكتب بالصيغة $\frac{z_1}{z_2}$ هو العدد z بحيث يحقق العلاقة

$$z_1 = z z_2$$
$$x_1 + iy_1 = (x + iy)(x_2 + iy_2)$$

وبمساواة الجزئين الحقيقي والخيالي وبعد فتح القوسين ينتج

$x_1 = x x_2 - y y_2$

$y_1 = x y_2 + y x_2$

وبحل هاتين المعادلتين للحصول على x و y نجد ان

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \text{and} \quad y = \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{}$$

اذا حاصل القسمة $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ هو

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \, \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Complex Conjugate مرافق العدد المعقد

المرافق العدد المعقد $z = x + iy$ ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ هو العدد المعقد

$\bar{z} = x - iy$ اي ان المرافق للعدد المعقد ينتج بتغير اشارة الجزء الخيالي منه

Example

The conjugate number to $z = 2 - 3i$ is $\bar{z} = 2 + 3i$

properties

(1) $z = 0 \iff \bar{z} = 0$

(2) $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$

(3) $\bar{i} = -i$ and $\overline{-i} = i$

(4) $\bar{\bar{z}} = z$

(5) $\bar{z} = -z$ (اذا كان العدد المعقد خيالي صرف)

(6) $\bar{z} = z$ (اذا كان العدد المعقد حقيقي)

(7) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

(8) $z + \bar{z} = 2 Re(z) = 2x$.

(9) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) = 2iy$

(10) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

(11) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(12) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

Exercies To Solve

(1) Write the following complex numbers in the form $x+iy$ where x and y are real numbers

(a) $(2+3i)^2$

(b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1-i}$

(c) $\frac{7-6i}{2+3i}$

(2) Prove that

(a) $\overline{\bar{z}+3i} = z-3i$

(b) $\overline{\frac{(2+i)^2}{3-4i}}$

Algebraic properties الخصائص الجبرية

معظم خصائص الجمع والضرب بين الاعداد المعقده تطابق نظيراتها بين الاعداد الحقيقية.

1. (The commutative Law) قاعدة الابدال

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (addition).

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (multiplication).

2. (The Associative Law) قاعدة التجميع

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (addition).

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_2 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (multiplication).

(3) (Distributive Law) قاعدة التوزيع

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$ توزيع الضرب على الجمع

(4) (Additive Identity) العنصر المحايد الجمعي

Since $0 = (0,0) = 0 + i \cdot 0$

$$z + 0 = 0 + z = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

(5) (Multiplicative Identity) العنصر المحايد الضربي

Since $1 = (1,0) = 1 + i \cdot 0$ then

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

(6) (Additive Inverse) النظير الجمعي

$$-z = -x - iy \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

such that

$$z + (-z) = 0$$

$-z$ is said to be the additive inverse of z

(7) (Multiplicative Inverse) النظير الضربي

$$z z^{-1} = z^{-1} z = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

z^{-1} is said to be the multiplicative inverse of z

<u>Example</u> Find the multiplicative inverse of

$$z = 3i - 2$$

<u>sol.</u> The multiplicative inverse of z is

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3i-2} = \frac{1}{-2+3i} = \frac{(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}$$ بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\therefore z^{-1} = \frac{-2-3i}{4+9} = \frac{-2-3i}{13} = \frac{-2}{13} - i\frac{3}{13}$$

Absolute Value القيمة المطلقة

القيمة المطلقة للعدد المعقد $z=x+iy$ ويرمز لها بالرمز $|z|$ هي

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ وهي عدد غير سالب

Ex. Find the absolute value of the complex number $z=4+3i$

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

properties

(1) $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$

(2) $|z|=|\bar{z}|$

(3) $|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$

(4) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Geometric Representation of a Complex Number

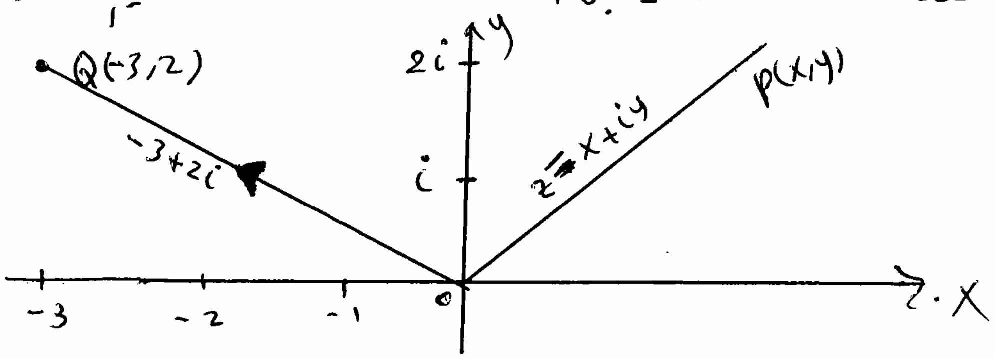
التمثيل الهندسي للعدد المعقد.

ان كل عدد معقد $z=x+iy$ يقابل نقطة احداثياتها (x,y) من المستوي xy وبالعكس

(اي ان كل نقطة في المستوي xy تقابل عدداً معقداً) وكل عدد معقد z
يمكن تمثيله بمتجه (vector) مبدؤه نقطة الاصل ونهايته النقطة التي تقابل
ذلك العدد.

يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور الخيالي والمستوي xy بمستوي
الاعداد المعقدة أو المستوي Z .

مثال العدد المعقد $z=-3+2i$ يقابل النقطة $Q(-3,2)$ كما في الشكل



ملاحظة :

ان المسافة بين نقطتين ممثلتين بالعددين المعقدين z_2, z_1 هو

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

ملاحظة الاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها الاصل ونصف قطرها r (radius) تحقق المعادلة

$$|z| = r$$

والاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ونصف قطرها عدد حقيقي موجب r تحقق المعادلة

$$|z - z_0| = r$$

Polar Coordinates الاحداثيات القطبية

لتكن $(r \geq 0)$ ، θ احداثيات قطبية للنقطة p التي تقابل العدد المعقد غير الصفر $z = x+iy$ لما كان

$$y = r\sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$$

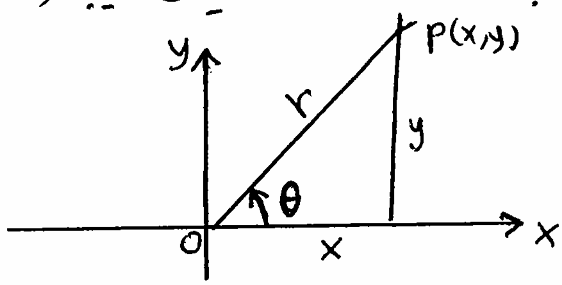
فان العدد المعقد z يمكن اعادة كتابته بالصيغة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
ان العدد الحقيقي r هو طول المتجه الذي يمثل z اي ان $r = |z|$ والعدد الحقيقي θ يسمى زاوية العدد المعقد z (argument of z) ويكتب

$$\theta = \arg z$$

ان زاوية العدد المعقد z اي الزاوية θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه z مع محور x الموجب باتجاه عكس عقارب الساعة.
وعلى ذلك فان لكل θ عدد غير منته من القيم الحقيقية تختلف عن بعضها بمضاعفات 2π ويمكن ايجاد هذه القيم من المعادلة

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



Euler's Formula صيغة أويلر

ان المتطابقة $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ تعرف بصيغة اويلر ويمكن كتابة العدد المعقد z بالصيغة

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

ومنها يكون النظير الضربي لـ z هو

$$z^{-1}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

وحاصل الضرب هو

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}$$
$$=r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

وناتج القسمة هو

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Exercies To Solve

(1) Write the complex numbers in polar form

(a) $2+2\sqrt{3}\,i$ (b) $-5+5i$ (c) $1+i$ (d) $\sqrt{3}-i$

solu.(b)

$$z=-5+5i$$
$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25+25}=50\Rightarrow\boxed{r=50}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{+5}{-5}\right)=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$z=50\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=50e^{i\frac{\pi}{4}}$$

solu.(c)

$$z=1+i$$
$$|z|=r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\Rightarrow r=\sqrt{2}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}\quad\text{or}\quad\tan(\theta)=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$z=re^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

solu.(d)

$z=\sqrt{3}-i \Rightarrow |z| = r = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore z = r e^{i\theta} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

or $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Powers and Roots القوى والجذور

ان القوى الصيغة لعدد معقد $z=re^{i\theta}$ هي ايجاد صيغتها $z^n = r^n e^{in\theta}$

De Moivre's Formula صيغة ديموفير

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

EX. Evaluate

(a) $(1+i)^8$

(b) $(1+i)^{-8}$

solu.(a) write $(1+i)$ in polar form

$|z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = r$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ or $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore (1+i) = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$\therefore (1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i2\pi} = 2^{\frac{8}{2}}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

$= 2^{8/2}[\cos 2\pi + 0]$

$= 2^{8/2}(1) = 2^{8/2} = 2^4 = 16$

solu.(b) من الفرع (a) وجدنا :

$(1+i)^{-8} = (\sqrt{2})^{-8} e^{-2i\pi}$

$= \frac{1}{16}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = \frac{1}{16}(1-0) = \frac{1}{16}$

يمكننا استخدام الصيغة $z^n=r^n e^{in\theta}$ في ايجاد جذور الاعداد المعقدة ، فمثلاً لايجاد جذور المعادلة $z^n=1$ نفرض $z=re^{i\theta}$ ولما كان $1=1\cdot e^{i0}$ فإن

$$(re^{i\theta})^n=1\cdot e^{i0}$$

$$r^n e^{in\theta}=1\cdot e^{i0}$$

اذا تساوى عددان معقدات قيمتاهما المطلقتان وان زاويتيهما تختلفان بمضاعفات 2π أي ان

$$r^n=1\ ,\quad n\theta=\overset{\text{صفر}}{0}+2K\pi \qquad (K=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

ومنها نجد ان

$$\theta=\frac{2K\pi}{n}\ ;\quad r=1 \qquad (K=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

وبهذا نحصل على الحلول

$$z=e^{i2\pi\frac{K}{n}}=\cos\left(\frac{2K\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2K\pi}{n}\right)$$

يمكن تمثيل هذه الجذور بنقاط رؤوس مضلع منتظم عدد اضلاعه n ونصف قطر دائرته الخارجية 1 ومركزه الاصل .

$$W_n=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

بموجب مبرهنة دي موفير تكون الجذور النونية للواحد هي

$$1,\ W_n,\ W_n^2,\ W_n^3,\ \dots,\ W_n^{n-1}$$

لاحظ ان $W_n^n=1$ ويمكن تعميم هذه الفكرة في حساب الجذور النونية لاي عدد معقد

$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ، $w\neq0$ لتصبح بالصيغة

$$\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2K\pi}{n}\right)+i\sin\frac{\varphi+2K\pi}{n}\right]$$

$$(K=0,1,2,\dots,n-1)$$

حيث $\sqrt[n]{\rho}$ الجذر النوني الموجب للعدد الحقيقي ρ الذي يمثل طول كل المتجهات التي تمثل مواقع الجذور النونية .

الزاوية $\frac{\varphi}{n}$ تمثل زاوية العدد المعقد لأحد الجذور .

ملاحظة ان زوايا الجذور الاخرى تنتج باضافة مضاعفات $\frac{2\pi}{n}$ الى $\frac{\phi}{n}$
اي لايجاد جذر عدد معقد، يلزم ايجاد جذر حول متجهه ثم تقسيم زاويته على دليل الجذر واذا كان Z_0 هو اي من الجذور النونية للعدد المعقد لها فان مجموع كل الجذور النونية هي

$$\{ Z_0, Z_0 w_n, Z_0 w_n^2, Z_0 w_n^3, \dots, Z_0 w_n^{n-1} \}$$

حيث

$$w_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

وان الضرب ب w_n يزيد زاوية العدد المعقد بمقدار $\frac{2\pi}{n}$

مثال جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$

الحل نكتب العدد $(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ بالصيغة القطبية فتكون قيمته المطلقة

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$r = \rho = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore Z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\; e^{-\frac{1}{3} i \frac{\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos 10^\circ - i\sin 10^\circ\right] = \sqrt{2}\left[\cos(-10) + i\sin(-10)\right]$$

ان الجذرين الاخرين ينتجان باضافة الى الزاوية (-10) مايعادل $\frac{1}{3}$ الدورة الواحدة اي

$\frac{360}{3} = 120$ فيكون

$$Z_0 W_3 = \sqrt{2}\left[\cos(-10^\circ) + i\sin(-10)^\circ\right]\left[\cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos(110^\circ) + i\sin(110^\circ)\right] = \sqrt{2}\; e^{i\left(\frac{110\pi}{180}\right)}$$

$$Z_0 w_3^2 = \sqrt{2}\left[\cos(-10^\circ) + i\sin(-10^\circ)\right]\left[\cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ)\right]^2$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos(230) + i\sin(230)\right]$$

$$= \sqrt{2}\; e^{i(230/180)\pi}$$

تمارين

(١) جد قيمة واحدة لزاوية العدد المعقد Z عندما

(a) $Z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ (b) $Z = \frac{i}{-2-2i}$

(٢) جد كل الجذور $(-i)^{1/3}$

(٣) جد قيم كل الجذور

(a) $\sqrt{-i}$ (b) $\sqrt{1+i}$

Exercises To solve

Q.1 Solve the following equations, for the real numbers x and y

(a) $(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy$

(b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$

(c) $(3-2i)(x+iy) = 2(x-2iy)+2i-1$

Q.2 How many the following complex numbers be obtained from $z = x+iy$ geometrically? sketch

(a) $\bar{z}$ (b) $\overline{(-z)}$

(c) $-z$ (c) $1/z$

Q.3 Find the result of :

(a) $\frac{3-i}{4+5i}$ (b) $\frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)(3+i)}$

Q.4 Show that the distance between the two points z_1 and z_2 in an Argand diagram is equal to $|z_1 - z_2|$.

Q.5 In the following problems, graph the points $z = x+iy$ that satisfy the given conditions.

(a) $|z| = 2$ (b) $|z| < 2$

(c) $|z| > 2$ (d) $|z+1| = 1$

Q.6 Express the answer to the following problems in the form $re^{i\theta}$ with $r \geq 0$ and $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Sketch.

(a) $(1+\sqrt{-3})^2$ (b) $\frac{1+i}{1-i}$

Q.7 Use De Moivre's theorem to express $\cos 4\theta$ and $\sin 4\theta$ as polynomials in $\cos\theta$ and $\sin\theta$.

Q.8 Find the results of the following:

(a) $\sqrt{i}$ (b) $\sqrt{-1-\sqrt{3}\,i}$

Q.9 Find the square roots at $(1+i)^3$

Q.10 Find the cube roots of the following

(a) unity (b) -8

(c) $-5+2i$ (d) $1+\sqrt{3}\,i$

Q.11 Find the roots of the following equation

$$2x^2-4x+4=0.$$

Q.12 Find the four roots of the following equations:

(a) $x^4+1=0$,

(b) $z^4-2z^2+4=0$.

Q.13 Find

(a) $|i(2-i)^3|$ (b) $\left|\frac{2+3i}{3+4i}\right|$

Q.14 Write the following complex numbers in form $x+iy$

(a) $3e^{\frac{\pi}{3}i}$ (b) $2\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$ (c) $e^{\frac{\pi}{3}}\,e^{-\frac{\pi}{6}i}$ (d) $-5\,e^{-\frac{7}{5}\pi i}$