الفصل الرابع

الأحتمالات probabilities

التجربة العشوائية : Random Experiment

هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها قبلًا

مثال/ رمي قطعة نقود مرة واحدة فأن التابع الممكنة $\{H, T\}$
$T = Tail$, $H = Head$

مثال/ رمي قطعة نرد مرة واحدة فأن التابع الممكنة
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فضاء العينة : Sample Space

جميع التابع الممكنة لتجربة ما حيث أن كل نتيجة out come تمثل بنقطة في فضاء العينة ونرمز له بالرمز (S).

مثال/ عند رمي قطعتين من النقود فان فضاء العينة يكتب بالشكل الآتي:
$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

مثال/ عند رمي قطعتي نرد مرة واحدة فان فضاء العينة يكتب بالشكل الآتي:
$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \\ (3,1), (3,2), \dots, (3,6) \\ (4,1), (4,2), \dots, (4,6) \\ (5,1), (5,2), \dots, (5,6) \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{Bmatrix}$$

الحدث : Event

هي نتيجة او عدة نتائج في فضاء العينة ويرمز له بأحد الاحرف الكبيرة $A, B, \dots, Z$.

مثال/ الحدث A يمثل ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود مرة واحدة
$$S = \{H, T\} \Rightarrow A = \{H\}$$

مثال/ لتجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة اكتب الاحداث الآتية:

A تمثل ظهور عدد زوجي

B تمثل ظهور عدد فردي

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{2,4,6\}$

$B=\{1,3,5\}$

انواع الأحداث

1- الحدث البسيط Simple Event

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S تحتوي على ناتج واحد من نتائج التجربة العشوائية.

مثال/ الحصول على كتابة عند رمي قطعة نقود مرة واحدة

$S=\{H,T\} \rightarrow A=\{T\}$

مثال/ الحصول على العدد 5 عند رمي زهرة نرد مرة واحدة

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow A=\{5\}$

2- الحدث المركب Compound Event

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S تحتوي على اكثر من ناتج من نتائج التجربة العشوائية.

مثال/ الحصول على عدد اولي عند رمي زهرة نرد مرة واحدة

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow A=\{1,2,3,5\}$

الحالات الممكنة possible cases

هو جميع الحالات المختلفة التي يمكن ان تظهر في تجربة معينة.

مثال/ نتيجة مباراة لفريق ما فان الحالات الممكنة هي:

$S=\{$ فوز W، خسارة L، تعادل D $\}$

الحدث المستحيل Impossible Event

هو الحدث الذي لايحتوي على اي عنصر كحدث ظهور العدد 8 في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة

الحدث المؤكد Sure Event

هو الحدث الذي يضم كافة عناصر فضاء العينة كحدث ظهور عدد أقل من 7 عند تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة

الاحداث الموائمة Success Cases

هي الحالات التي تحقق ظهور الحادث المراد دراسته وتسمى ايضاً بحالات النجاح .

مثال / عند رمي زهرة نرد مرة واحدة وكان الحدث E هو الحصول على عدد فردي فالحالات التي تحقق ذلك هي $\{1, 3, 5\}$ هذه الحالات الثلاث تسمى بالحالات الموائمة .

الاحداث المستقلة Independent Events

هي الاحداث التي اذا وقع احدها لايمنع او يؤثر على وقوع الاحداث الأخرى .

مثال / عند رمي قطعتي نقود في آن واحد فالحصول على صورة في القطعة الاولى لايؤثر على نتيجة القطعة الثانية .

الاحداث المعتمدة Dependent Events

هي الحوادث التي اذا وقع أحدها يؤثر في وقوع الاحداث الأخرى .

مثال / صندوق به كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي حيث لايعاد الكرة الاولى حيث أن نتيجة السحبة الثانية تتأثر بنتيجة السحبة الاولى لذا فالحادثان غير مستقلين (معتمدين) .

الأحداث المتنافية: Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A و B أنهما متنافيان اذا استحال حدوثهما معاً .

مثال / عند رمي قطعة النقود مرة واحدة فمن المستحيل الحصول على صورة وكتابة في آن واحد .

الأحتمال: probability

هو نسبة عدد الحالات الموائمة (حالات النجاح) الى عدد الحالات الممكنة أي أن :

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

- $P(A)$ → احتمال حدوث الحدث A
- $n(A)$ → عدد النواتج في الحدث A
- N → عدد النواتج في فضاء العينة (الكلية)

خواص الاحتمالات

$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(S) = 1$$
$$P(\phi) = 0$$
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Event's Operation — عمليات الأحداث

1- Union — الاتحاد

نفرض أن A و B حدثان معرّفان في فضاء العينة S فإن اتحاد A و B ويرمز له $A \cup B$ ويعرّف بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي الى الحدث A او الحدث B أو كليهما.

$$A \cup B = \{X : X \in A \text{ or } X \in B \text{ or } X \in A, B\}$$

2- Intersection — التقاطع

ويعرّف بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي الى كل من الحدث A والحدث B ويرمز له $A \cap B$ أي أن:

$$A \cap B = \{X : X \in A \text{ and } X \in B\}$$

أما اذا لم يكن هناك عنصر مشترك بين الحدثين A و B فإن: $A \cap B = \{\phi\}$ وهي مجموعة خالية لاتحتوي على أي عنصر.

3- Difference — الفرق

Difference

يعرف الفرق بين الحدثين A و B بأنه مجموعة من العناصر التي تنتمي الى A ولاتنتمي الى B ويرمز له $A - B$ أي أن:

$$A - B = \{X : X \in A \text{ and } X \notin B\}$$
$$B - A = \{X : X \in B \text{ and } X \notin A\}$$

4- Complement — المتمم

Complement

ويعرف المتمم للحدث A بأنه مجموعة العناصر التي لاتنتمي الى الحدث A ويرمز له $\bar{A}$ أي أن:

$$\bar{A} = \{X : X \in S \text{ and } X \notin A\}$$

تمارين

(١) في مدرسة مختلطة هناك 100 بنت و 200 ولد ، لو أردنا منح جائزة لطالب واحد فقط في المدرسة ما هو احتمال فوز ولد بالجائزة.

الحل/ نفرض الحدث A هو فوز ولد بالجائزة

$$N = 100 + 200 = 300$$
$$n(A) = 200$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

(٢) عند سحب كرة واحدة من وعاء به 4 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 5 كرات زرقاء. ما هو احتمال :

أ- ان تكون الكرة بيضاء

ب- " " " حمراء

ج- " " " زرقاء

الحل/
$$S = \{ w, w, w, w, R, R, R, B, B, B, B, B \}$$

$$N = 4 + 3 + 5 = 12$$
$$n(w) = 4 \quad , \quad n(R) = 3 \quad , \quad n(B) = 5$$

$$P(w) = \frac{n(w)}{N} = \frac{4}{12}$$

$$P(R) = \frac{n(R)}{N} = \frac{3}{12}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{5}{12}$$

(٣) صف دراسي به 10 اولاد و 20 بنت بحيث كانت عيون نصف الاولاد وعيون نصف البنات بنية اللون. أختير احد ابناء الصف بطريقة عشوائية

أ- ما هو احتمال ان يكون الشخص المختار ولد

ب- " " " " " بنت

ج- " " " " " له عينان بنيتان.

الحل/

(أ
$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

(ب
$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

(ج
$$P(C) = \frac{n(C)}{N} = \frac{5+10}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

④ عائلة لديها طفلان

أكتب فضاء العينة ثم احسب الاحتمالات التالية :

ا - الحدث A يمثل ان الطفلين من نفس النوع .

ب - الحدث B يمثل ان بالعائلة على الأقل بنت واحدة .

ج - الحدث C يمثل ان بالعائلة على الاكثر بنت واحدة .

د - الحدث D بالعائلة ثلاثة أولاد .

الحل /

$$S=\{gg, gb, bg, bb\}$$

$$A=\{gg, bb\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{N}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$B=\{gg, bg, gb\} \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{N}=\frac{3}{4}$$

$$C=\{bg, gb, bb\} \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{N}=\frac{3}{4}$$

$$D=\{\not\phi\} \Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{N}=\frac{0}{4}=0$$

⑤ تجربة رمي زهرة نرد وقطعة نقود معًا مرة واحدة . صِفْ فضاء العينة ثم احسب الاحتمالات للأحداث التالية :

ا - الحدث A يمثل ظهور العدد 5 .

ب - الحدث B يمثل ظهور صورة مع عدد فردي .

ج - الحدث C يمثل ظهور كتابة مع عدد يقبل القسمة على 3 بدون باقي

د - الحدث D يمثل ظهور صورة أو كتابة مع العدد 8 .

الحل /

$$S=\{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

ا) $A=\{H5, T5\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{N}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

ب) $B=\{H1, H3, H5\} \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{N}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

ج) $C=\{T3, T6\} \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{N}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

د) $D=\{\not\phi\} \Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{N}=\frac{0}{12}=0$

هـ) الحدث E يمثل ظهور عدد زوجي

$$E=\{H2, H4, H6, T2, T4, T6\} \Rightarrow P(E)=\frac{n(E)}{N}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

التباديل Permutation

نقصد بالتباديل أنها عدد طرق الاختيار المرتبة التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرمز له P_r^n اي تباديل r من n وتحسب كالآتي :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , r \le n$$

أو أنها :

عدد التراتيب لأشياء مختلفة عددها n مأخوذة r في كل مرة (مع ملاحظة أهمية تسلسل موقع هذه الأشياء).

مثال/ اذا كان لدينا اربعة حروف A, B, C, D واختر منها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار هذين الحرفين (مرتبين مختلفين).

الحل/

$$P_r^n = P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

4	3

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC

مثال/ كتبت الارقام من (١ ← ٩) على بطاقات ووضعت في صندوق ثم سحبت منه 5 بطاقات (الواحدة بعد الأخرى) فكم عدداً فاسياً (ارقامه مختلفة) يمكن تكوينه.

الحل/

$$P_r^n = P_5^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 15120$$

9	8	7	6	5

وأن :

$$P_n^n = n! \quad , P_0^n = 1$$

ملاحظة :

اذا كان هناك n من الأشياء منها m_1 من الاشياء المتشابهة و m_2 من الأشياء المتشابهة الأخرى و m_3 من الاشياء المتشابهة ايضاً فان عدد الطرق الممكنة (التباديل) لترتيب هذه الاشياء على خط هو :

$$\frac{n!}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} \quad , m_1 + m_2 + m_3 = n$$

مثال/ عدد الطرق الممكنة لترتيب حروف كلمة Statistics

الحل/

$$\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1} \times \cancel{3 \times 2 \times 1} \times 1 \times 1 \times \cancel{2 \times 1} \times \cancel{1}}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 10$$

$$= 50400$$

Combinations التوافيق

نقصد بالتوافيق بأنها عدد طرق الاختيار غير المرتبة التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرمز له C_r^n أو $\binom{n}{r}$ وقانونه هو:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad , r \le n$$

مثال/ ما عدد الطرق لاختيار لجنة مؤلفة من 5 أشخاص من مجموع 9 أشخاص:

$$C_5^9 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1} = 9\times7\times2 = 126$$

$5! \quad 4!$

ملاحظات: (1) عدد ترتيب n من الأشياء المختلفة حول دائرة هو $(n-1)!$

مثال/ بكم طريقة يمكن جلوس 4 أشخاص حول مائدة مستديرة:

الحل/ $(n-1)! = (4-1)! = 3! = 3\times2\times1 = 6$

(2) إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث A هو n وإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث B هو m وكان الحدثان A و B مستقلان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدثان A و B هو $(n)(m)$ من الطرق.

مثال/ كم لجنة سباعية يمكن اختيارها من 6 مهندسات و5 أطباء على أن تضم 4 مهندسات.

الحل/ $C_4^6 \cdot C_3^5 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} = (15)(10) = 150$

مثال/ صف به 10 طالبات، 3 منهن عيونهن زرقاء. بكم طريقة يمكن اختيار طالبتين بصورة عشوائية بحيث يكون:

1- عيون الطالبتين زرقاء
2- عيون الطالبتين ليست زرقاء
3- على الأقل طالبة واحدة عيونها زرقاء
4- على الأكثر طالبة واحدة عيونها زرقاء

الحل/

① $C_2^3 \cdot C_0^7 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{7!}{0!(7-0)!} =$

② $C_0^3 \cdot C_2^7 = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \frac{7!}{2!(7-2)!} =$

③ $C_1^3 \cdot C_1^7 + C_2^3 \cdot C_0^7$

④ $C_1^3 C_1^7 + C_0^3 \cdot C_2^7$

واجب (7)

س١/ اتفق رجل وزوجته ان ينجبا ثلاث أطفال. صف فضاء العينة ثم اوجد الاحتمالات للأحداث الآتية:

① الحدث A بنتان وولد
② الحدث C على الأقل ولد واحد
⑤ الحدث E على الاكثر ولد واحد
⑦ الحدث G اربعة بنات
③ الحدث B ولدان وبنت
④ الحدث D على الاكثر بنت واحدة
⑥ الحدث F على الأقل بنت واحدة
⑧ الحدث H ثلاث اولاد بالضبط

س٣/ بكم طريقة يمكن اختيار لوحة لارقام سيارة مؤلفة من ٤ ارقام من بين ١٠ ارقام (بدون تكرار).

س٢/ بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب رياضيات و 3 كتب فيزياء و 6 كتب أحياء و 2 كتب كيمياء على رف مكتبة.

س٤/ بكم طريقة يمكن جلوس 8 أشخاص حول طاولة طعام مستديرة.

س٥/ صف دراسي يتكون من ٥ طالبات و ١٥ طلاب. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة عشوائية مكونة من 3 من هذا الصف بحيث يتم:

① اختيار ثلاثة طلاب فقط
② اختيار طالبين على الاكثر
⑤ اختيار اربعة طلاب على الاكثر
⑦ اختيار طالب واحد على الأقل
④ اختيار ثلاثة طالبات فقط
⑥ اختيار ثلاثة طالبات على الاكثر
⑧ اختيار من طالبات فقط.

س٦/ جد ناتج كلاً مما يأتي:

P_3^{10} ، P_5^5 ، P_0^8

C_3^{10} ، C_5^5 ، C_0^8