سلوك دالة قدرة كثافة الطيف لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي الطبيعي من الرتبة الثانية

الاستاذ المساعد محمد قدوري الخضيري
كلية المنصور الجامعة
قسم العلوم التجارية والمصرفية

المستخلص

يهـــدف هذا البحث إلى تتبع سلوك دالة قدرة كثافة الطيف لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي الطبيعي من الرتبة الثانية AR(2) من خلال أجراء دراسة تجريبية باســتخدام المحاكاة Simulation لاحتساب قيم قدرة كثافة الطيف PSD ولأحجام مختلفة ولفترات موسمية مختلفة ولترددات مختلفة وان أهم الاستنتاجات التي توصل إليها الباحث هي أن قيم قدرة كثافة الطيف PSD تتناقص تدريجيا كلما ازداد حجم العينة وطول الموسم والترددات.

أولا: المقدمـــــة Introduction

هـــناك العديد من الظواهر الطبيعية التي قادت الإنسان إلى تطوير المفاهيم الخاصة بتقديرات الطيف منها على سبيل المثال التغيرات الموسمية وأشكال القمر وحركة الأجرام السماوية.

أن الأســـاس الرياضـــي لـــتقديرات الطيف[1] يعود إلى القرن السابع عشر وبالذات لعمل العالم Isaac Newton الذي لاحظ ان ضوء الشمس المار عبـــر

موشور زجاجي يتحلل إلى حزم عديدة من الألوان واكتشف أن كل لون يمثل طولا موجـيا معيناً من الضوء وان الضوء الأبيض للشمس يحتوي على جميع الأطوال الموجـية كما أن هذا العالم أطلق عام 1971 كلمة طيف Spectrum (كلمة مشتقة مـن الكلمـة اللاتينـية Specter التي تعني الصورة أو الشبح) كمصطلح علمي لوصف الحزم اللونية للضوء.

بدأ الاهتمام بالسلاسل الزمنية في عام 1807 عندما ادعى Joseph Fourier[1] أن أيـة سلسلة زمنية يمكن تبسيطها على شكل مجموعة حدودها تتضمن الجيب sin والجيب تمام cosine وسميت منذ ذلك التاريخ سلسلة Fourier.

شـهد عام 1930 [7] نقطة التحول بالنسبة للتحليل الطيفي وذلك عندما نشر الباحـث Norbert Wiener بحـثه الموسوم "التحليل الطيفي العام" وهذا البحث وضـع التحلـيل الطيفـي بقوة ضمن الأساليب الإحصائية في معالجتها للعمليات العشـوائية فضـلاً عن وضع تعاريف إحصائية دقيقة لكل من معاملات الارتباط الذاتي وقدرة كثافة الطيف.

قام الباحث Winter[12] في عام 1960 بمعالجة السلاسل الزمنية التي تحـتوي علـى الموسمية ويقصد بالسلسة الزمنية الموسمية[3] Seasonal Time Series مجموعـة من القيم المشاهدة المأخوذة بمدد زمنية متساوية وتحتوي على ظاهرة الموسمية والتي تشير إلى النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر المـتقابلة مثلاً خلال السنوات المتتالية حيث إن السلسلة تعيد نفسها بعد فترة زمنية منتظمة من الزمن وتدعى هذه الفترة (الفترة الموسمية) ويرمز لها بالرمز (S) وقد تكون سنة او فصلا أو شهرا،...الـــخ.

أي إن

$$f(t-s)=f(t) \qquad \ldots\ldots(1.1)$$

ثانيا: هـدف البحـث:

يهـدف هذا البحث إلى تتبع سلوك دالة قدرة كثافة الطيف لنموذج الانحدار الذاتـي الموسـمي مـن الرتـبة الثانية AR(2) من خلال أجراء دراسة تجريبية باسـتخدام المحاكـاة Simulation لاحتسـاب قيم PSD ولأحجام عينات مختلفة ولفترات موسمية مختلفة ولترددات مختلفة.

ثالثاً: الطيـف Spectrum

الطيف للعملية المستقرة عبارة عن تحويل Fourier لدالة التباين المشترك الذاتي المطلقة القابلة للجمع أي إن:

$$P(w)=\frac{1}{2\prod}\sum_{K=-\infty}^{\infty}\gamma_K e^{-iwk} \qquad ....(3.1)$$

وللسلسة ذات القيم الحقيقية ينتج:

$$P(w)=\frac{1}{2\prod}\gamma_\circ+\frac{1}{\prod}\sum_{K=1}^{\infty}\gamma_k\cos wk,-\prod\le w\le\prod \qquad ....(3.2)$$

حيث ان:

$$\gamma_k=\gamma_{(-k)}$$

وان γ_k يمكن تمثيلها بشكل طيفي من خلال تكامل Fourier - Stieltjes وكالآتي:

$$\gamma_k=\int_{-\prod}^{\prod}e^{-iwk}dP(w) \qquad ....(3.3)$$

وتعرف P(w) بأنها قدرة التوزيع الطيفي Power of spectrum ومثلها مثل أي دالة توزيع إحصائي فهي دالة غير متناقصة.

يلاحظ أن P(w) لا تتمتع بخواص دالة التوزيع الاحتمالي بشكل كامل وذلك لان:

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} dP(w) = \gamma_{\circ}$$

وان $\gamma_{\circ}$ ليست بالضرورة تساوي واحد وعليه يمكن تعريفها كالآتي:

$$f(w) = \frac{P(w)}{\gamma_{\circ}}$$

وان $G(w) \geq \circ$ كما أن:

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} dF(w) = 1$$

وبما أن:

$$dF(w) = f(w)dw$$

فأن:

$$f(w)dw = dP(w) = \frac{P(w)}{\gamma_{\circ}} dw$$

من المعادلات (3.1) و(3.2) فأن تحويل Fourier كالآتي:

$$f(w) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{-iwk} \qquad \ldots.(3.4)$$

وأن:

$$r(k) = \int_{-\Pi}^{\Pi} p(w) e^{iwk} dw \qquad \ldots.(3.5)$$

حيث أن:

$$w_k = \frac{2\Pi k}{n} \qquad \text{و} \quad k = o,1,2,\ldots.,\frac{n}{2}$$

والدالـــة p(w) تســمى قدرة كثافة الطيف power spectral Density ويرمـــز لها PSD وتعرف بأنها مقياس لتوزيع القدرة كدالة التردد حيث أن التردد Frequency تمثل عدد الدورات في الثانية. وخواص هذه الدالة هي:

1. $\int_{-\Pi}^{\Pi} F(w)dw = 1$
2. $F(w) \geq \circ, \forall w$
3. $F(-w) = F(w)$ للعمليات ذات القيم الحقيقية

أن الطـــيف الذي يمثل معدل مربع دالة كثافة الطيف الى المتغير المستقل الذي يعتبر ثابت في نقطة معينة ومتغير في نقطة أخرى يعرف بطيف القدرة.

رابعاً: نموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية [12]

Seasonal Autoregressive Model from Second order SAR(2)

باستخدام عامل الإزاحة الخلفي B في الصيغة الآتية:

$$\Phi_s(B^s)X_t = a_t \qquad \ldots.(4.1)$$

وبما أن $\Phi_s(B^s)$ يمكن كتابته بالصيغة الآتية:

$$\Phi_s(B^s) = 1 - \Phi_s B^s - \Phi_{2S} B^{25} - \ldots. - \Phi_{ps} B^{ps} \qquad \ldots.(4.2)$$

نعوض الصيغة (4.2) في الصيغة (4.1) ينتج:

$$(1 - \Phi_s B^s - \Phi_{2S} B^{2S} - \ldots. - \Phi_{ps} B^{ps})X_t = a_t$$
$$X_t - \Phi_s B^s X_t - \Phi_{2S} B^{2S} X_t - \ldots. - \Phi_{ps} B^{ps} X_t = a_t$$

وبما أن:

$$p = 2$$
$$B^j X_t = X_{t-j}$$

∴ تكون صيغة نموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية بالصيغة الآتية:

$$X_t = \Phi_s X_{t-s} + \Phi_{2S} X_{t-2S} + a_t \quad \ldots.(4.3)$$

حيث:

قيم مشاهدات السلسلة الزمنية الموسمية	$X_{t-is}, i = O,1,2$
طول الفترة الموسمية	s
معالم الانحدار الذاتي الموسمي	$\Phi_{is}, i = 1,2$
درجة النموذج الموسمي	p
الخطأ العشوائي	a_t

وأن:

$$a_t \approx NID\left(\circ, \sigma_a^2\right)$$

وبــدون فقــدان العمومية قام الباحث باشتقاق الخصائص النظرية لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية:

أ. الاستقرارية:[4] **Stationary**

كي تتحقق الاستقرارية يشترط أن تكون جذور المعادلة $\Phi_s(B^s)=1-\Phi_s B^s-\Phi_{2S}B^{2S}=O$ خارج دائرة الوحدة Unit Circle التي نصف قطرها يساوي واحد.

لتكن B_2, B_1 جذور المعادلة:

$$\left(1-\Phi_s B^s-\Phi_{2S}B^{2S}\right)=O$$

أو:

$$\Phi_s B^s+\Phi_s B^s-1=O \qquad \text{....(4.4)}$$

وبحل المعادلة (4.4) بطريقة الدستور (العزوم) نجد أن:

$$B_1=\frac{-\Phi_s+\sqrt{\Phi_s^2+4\Phi_{2S}}}{2\Phi_{2S}}$$

$$B_2=\frac{-\Phi_s-\sqrt{\Phi_s^2+4\Phi_{2S}}}{2\Phi_{2S}}$$

$$\therefore \frac{1}{B_1}=\frac{\Phi_s+\sqrt{\Phi_s^2+4\Phi_{2S}}}{2\Phi_{2S}}$$

$$\frac{1}{B_2}=\frac{\Phi_s-\sqrt{\Phi_s^2+4\Phi_{2S}}}{2\Phi_{2S}}$$

$$\therefore |Bi|>, i=1,2$$

$$\therefore \left|\frac{1}{Bi}\right|<1, i=1,2$$

وهذا يعني أن:

$$\left|\frac{1}{B_1}\cdot\frac{1}{B_2}\right|=|\Phi_{2S}|<1$$

$$|\Phi_s|=\left|\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right|<2$$

∴ لكي يكون النموذج مستقرا يشترط أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} -1 < \Phi_{2S} < 1 \\ -2 < \Phi_{S} < 2 \end{array}\right\} \qquad \ldots(4.5)$$

ب. التباين المشترك الذاتي: Autocovariance

$$\left(1-\Phi_{s}B^{s}-\Phi_{2S}B^{2S}\right)X_{t}=a_{t}$$
$$X_{t}=\Phi_{s}X_{t-s}+\Phi_{2S}X_{t-2S}+a_{t}$$

بأخذ التوقع والضرب بالمقدار X_{t-k} للطرفين ينتج:

$$EX_{t}X_{t-k}=\Phi_{s}EX_{t-s}X_{t-k}+\Phi_{2S}EX_{t-2S}X_{t-k}+Ea_{t}X_{t-k}$$
$$\gamma_{x}(k)=\Phi_{s}\gamma_{x}(k-s)+\Phi_{2S}\gamma_{x}(k-2S)+\gamma_{ax}(k) \qquad \ldots(4.6)$$

$$\because \gamma_{x}(-k)=\gamma_{x}(k)$$

من أعلاه يمكن كتابة الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية بالشكل الآتي:

$$\gamma(k)=\begin{cases}\Phi_{s}\gamma(s)+\Phi_{2S}\gamma(2S)+\sigma_{a}^{2}, k=o \\ \Phi_{s}\gamma(o)+\Phi_{2S}\gamma(s), k=s \\ \Phi_{s}\gamma(s)+\Phi_{2S}\gamma(o), k=2S \\ o, o/s\end{cases} \qquad \ldots(4.7)$$

جـ. الارتباط الذاتي: Autocorrelation

يمكن كتابة الارتباط الذاتي للنموذج SAR(2) بالشكل الآتـــــي:

$$\rho_k = \Phi_s \rho_{k-s} + \Phi_{2S} \rho_{k-2S} \qquad \ldots(4.8)$$

$$\rho_s = \Phi_s + \Phi_{2S} \rho_s$$ عندما k=s

$$\rho_{2S} + \Phi_s \rho_s + \Phi_{2S}$$ عندما k=2S

مـــن أعـــلاه يمكن كتابة الصيغة العامة للارتباط الذاتي للنموذج SAR(2) بالشكل الآتي:

$$\rho_{(k)} = \begin{cases} 1, k = o \\ \dfrac{\Phi_s}{1-\Phi_{2S}}, k = s \\ \dfrac{\Phi_s^2 + \Phi_{2S} - \Phi_{2S}^2}{1-\Phi_{2S}}, k = 2S \\ o, o/s \end{cases} \qquad \ldots(4.9)$$

ء. الارتباط الذاتي الجزئي:[12] Partial Autocorrelation

$$\Phi_{ss} = \rho_s = \frac{\Phi_s}{1-\Phi_{2S}}$$

$$\Phi_{2S,2S} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_s \\ \rho_s & \rho_{2S} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_s \\ \rho_s & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_s - \rho_s^2}{1-\rho_s^2}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\Phi_s^2 + \Phi_{2S} - \Phi_{2S}^2}{1-\Phi_{2S}}\right) - \left(\dfrac{\Phi_s}{1-\Phi_{2S}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\Phi_2}{1-\Phi_{2S}}\right)^2}$$

$$= \frac{\Phi_{2S}\left[(1-\Phi_{2S})^2 - \Phi_s^2\right]}{(1-\Phi_{2S})^2 - \Phi_s^2} = \Phi_{2S}$$

مــن أعلاه يمكن كتابة الصيغة العامة للارتباط الذاتي الجزئي للنموذج SAR(2) بالشكل الآتي:

$$\Phi_{kk} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_s}{1-\Phi_{2S}}, k = s \\ \Phi_{2S, k=2S} \\ o, otw \end{bmatrix} \qquad \ldots(4.10)$$

خامساً: تقدير معلمات النموذج:[2] **Estimate of Parameter's Model**

تــم تقديــر معلمتا نموذج الانحــــدار الذاتـــي الموسمي من الرتبة الثانية SAR(2) بطريقة العزوم وكالاتي:

$$\because \underline{\hat{\Phi}} = -R_{\hat{k}}^{-1}\underline{\hat{r}} \qquad \ldots(5.1)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_s \\ \hat{\Phi}_{2S} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{R}(O) & \hat{R}(1) \\ \hat{R}(1) & \hat{R}(O) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{R}(1) \\ \hat{R}(2) \end{bmatrix}$$

حيث أن $\hat{R}(k)$ دالة التباين المشترك الذاتي للعينة. وأن:

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|k|}(X_t - \overline{X})(X_{t-|k|} - \overline{X}) \qquad \ldots(5.2)$$

ويمكن تقدير تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_a^2$ للنموذج SAR(2) وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\sigma}_a^2 = \left(\frac{n-2}{n-3}\right)\left(\hat{R}(O) + \hat{\Phi}_s \hat{R}(1) + \hat{\Phi}_{2S} \hat{R}(2)\right) \qquad \ldots(5.3)$$

سادساً: الطيف للنموذج SAR(2):[5][15]

أن دالـــة قـــدرة كثافة الطيف لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية يكون بالشكل الآتي:

$$P(w)=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{\left|1-\Phi_s e^{-isw}-\Phi_{2S}e^{-isw}\right|^2}\quad , w_k-2\prod k|s \quad k=\pm1,\pm2,\ldots,\pm\left(\frac{s}{2}\right) \qquad \ldots.(6.1)$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{\left|1-\Phi_2(\cos sw-i\sin sw)-\Phi_{2S}(\cos 2sw-i\sin 2sw)\right|^2}$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\frac{1}{\left|1-\Phi_2\cos sw-\Phi_{2S}\cos 2sw+i(\Phi_2\sin sw+\Phi_{2S}\sin 2sw)\right|^2}$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{\begin{array}{l}1+\Phi_s^2\cos^2 sw+\Phi_{2S}^2\cos^2 2sw-2\Phi_s\cos sw-2\Phi_{2S}\cos 2sw+2\Phi_s\Phi_{2S}\cos sw\cos 2Sw\\+\Phi_s^2\sin^2 sw+\Phi_{2S}^2\sin^2 2sw+2\Phi_s\Phi_{2S}\sin sw\sin 2sw\end{array}}$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{\begin{array}{l}1+\Phi_s^2+\Phi_{2S}^2-2\Phi_s\cos sw-2\Phi_{2S}\cos 2sw+2\Phi_2\Phi_{2S}\cos sw\cos 2sw\\+4\Phi_s\Phi_{2S}\sin sw\sin 2sw\end{array}}$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{1+\Phi_s^2+\Phi_{2S}^2-2\Phi_s\cos sw-2\Phi_{2S}\cos 2sw+2\Phi_s\Phi_{2S}\cos sw}$$

$$=\frac{\hat{\sigma}_u^2}{2\prod}\bullet\frac{1}{1+\hat{\Phi}_s^2+\hat{\Phi}_{2S}^2-2\hat{\Phi}_s\left(1-\hat{\Phi}_{2S}\right)\cos sw-2\hat{\Phi}_{2S}\cos 2sw}\qquad \ldots.(6.2)$$

سابعاً: المحاكاة [8][11] Simulation

تم تصميم تجربة محاكاة لاحتساب دالة قدرة كثافة الطيف POD لنموذج الانحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية SAR(2) وكررت التجربة (5000) مرة لأحجام عينات (n=25,50,100) ولقيم أولية للمعلمات $\Phi_s = \begin{pmatrix} -1.5 \\ +0.75 \end{pmatrix}, \Phi_{25} = \begin{pmatrix} +0.56 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ وللفترات الموسمية (S=4,12) حيث تم تقدير معلمتا النموذج بطريقة العزوم وان الأخطاء العشوائية للنموذج تتوزع طبيعيا بوسط حسابي صغر وتباين σ_a^2 وكانت النتائج كالآتي:

جدول (1)

يبين قيم PSD للنموذج SAR(2)

n	w	S=4		S=12	
		$\Phi_s = -1.5$ $\Phi_{25} = +0.56$	$\Phi_s = 0.75$ $\Phi_{25} = -0.5$	$\Phi_s = -1.5$ $\Phi_{25} = 0.56$	$\Phi_s = 0.75$ $\Phi_{25} = -0.5$
25	45	0.009984	0.009608	0.008892	0.007304
	90	0.007304	0.004862	0.003652	0.002431
	135	0.006710	0.004451	0.003355	0.002327
	180	0.005113	0.003992	0.003041	0.002083
50	45	0.009962	0.009600	0.008309	0.007196
	90	0.007288	0.004850	0.003615	0.002422
	135	0.006707	0.004217	0.003329	0.002259
	180	0.005047	0.003643	0.003024	0.002065
100	45	0.009955	0.009583	0.008177	0.007110
	90	0.007094	0.004790	0.003611	0.002404
	135	0.006686	0.004013	0.003301	0.002193
	180	0.004818	0.003317	0.002994	0.002044

ثامناً: الاستنتاجات Conclusions

١- تتناقص قيم PSD كلما ازداد حجم العينة (n).

٢- تتناقص قيم PSD كلما ازداد طول الموسم (s).

٣- تتناقص قيم PSD كلما ازداد التردد (w).

تاسعاً: التوصيـــــات

١- تعمـــيم هـــذه الدراســـة لتشـــمل نماذج الانحدار الذاتي الموسمية من الرتبة العليـــا (P).

٢- تعمـــيم هذه الدراسة لتشمل نماذج السلاسل الزمنية الموسمية الأخرى مثل نموذج الأوساط المتحركة SMA والنموذج المختلط SARMA والنماذج الأخرى التي لا تتصف بالموسمية.

عاشراً: المصادر References

1. Bloom fieldm, P. (1976) Fourier Analysis of Time Series: In Introduction, Wiley Intersience, New York.
2. Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. & Reinsel, G.C (1994) Time Series Analysis: Forecasting and control, 3rd, Prentice Hall, New Jersey.
3. Brockwell, P.J and Davis, R.A (1996) Introduction to time Series and Forecasting, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
4. Hamilton, J. (1994) Time Series, Princeton Universtiy Press, Priceton.
5. Jenkins, G.M. & Watts, D.G. (1968) Spectral Analysis and it's Application, Holden – Day, San Francisco.
6. Kay, S.M (1988) Modern Spectral Estimation: Theory and Application, Englewood cliffs, NJ, Prentice – Hall.
7. Koopmans, L.H. (1974) The Spectral Analysis of time Series, Acadimic Press, New York.
8. Morgan, B.J.T. (1984) Elements of Simulation, Chapman and Hall, London.
9. Priestly, M.B. (1981) Spectral Analysis and Time Series, Vol. (1,2), Acadimic press, London.
10. Wei, W.W.S. (1990) Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods, Addison Wesley Publishing Company Inc., U.S.A.
11. Wood, A.T.A. & Groce, C. (1994) Simulation of Stationary Gaussian Processes, Jornal of Computational and graphical statistics 3, PP. (409-423).
12. Yaffee, R.A. & Mc Gee, M. (2000) Introduction To Time Series Analysis and Forecasting, Academic Press, San Diego.

The Behavior of Power Spectral Density Function for Gaussian Seasonal Autoregressive Model From Second Order – Simulation Study –

Ass. Prof. Muhammad K. Abid
Mansour University College

ABSTRACT

The research aims the behavior of power spectral Density function for Gaussian Seasonal Autoregressive Model from order (2), by doing an experimental Simulation study. This is to calculate the Values of power spectral Density function of different Sample Sizes for different Seasonal length and of different frequencies.

Among the main conclusion is that PSD Values decrease gradually when the sample size, season length and frequencies increase.